Valoración financiera y contable de carteras con participaciones cruzadas mediante arbitraje: existencia y unicidad de solución general

Lluís Planas i Casamitjana
Universitat de Girona
lluis.planas@udg.es
972 41 87 34
972 22 88 08

Valoración financiera y contable de carteras con participaciones cruzadas mediante arbitraje: existencia y unicidad de solución general

Resumen

La valoración contable de los grupos empresariales con participaciones cruzadas puede realizarse a partir de consideraciones de valoración por arbitraje y derivaciones del Teorema de Frobenius, que explicitan la validez general del método de Mir y Rabaseda (1993).

Se presenta asimismo una simplificación del método, demostrando la posibilidad de trabajar directamente sobre los datos contables sin depurar previamente la autocartera.

Palabras clave:

Arbitraje

Valoración

Frobenius

Valoración financiera y contable de carteras con participaciones cruzadas mediante arbitraje: existencia y unicidad de solución general

1. Introducción

El presente trabajo desarrolla un método de valoración financiera de sociedades con participaciones cruzadas en el contexto de la consolidación. En realidad, es un desarrollo del método basado en el neto virtual Mir y Rabaseda (1993), con algunas diferencias de matiz.

Metodológicamente partiremos del concepto de valoración financiera por arbitraje, tal cómo se presenta en Milne (1995); mostraremos inmediatamente que las empresas con participaciones cruzadas son en realidad carteras compuestos de activos elementales, y cómo tales carteras pueden valorarse por arbitraje.

Introduciremos finalmente la demostración de que determinada matriz es forzosamente no singular, y, por tanto el método de valoración de Mir y Rabaseda tiene validez general, y siempre es factible. Esta demostración es una aplicación de los resultados de Frobenius (1908).

El lector interesado observará que existe un claro paralelismo entre la metodología de las tablas input-output de Leontief, el método de valoración de Sraffa y la consolidación financiera. Decía Samuelson que bajo problemas parejos subyacen estructuras idénticas: esta fue, en realidad el punto de partida del presente anàlisis.

2. Valoración de carteras con participaciones cruzadas

Los métodos de valoración por arbitraje pueden utilizarse con facilidad para determinar el valor de mercado de carteras de activos con participaciones cruzadas. Esta situación puede darse en tres contextos distintos:

a) En el seno de grupos societarios con o sin holding, en el que las distintas sociedades poseen participaciones de una o varias de las sociedades restantes.

b) En la valoración de sociedades formalmente independientes que en su cartera de valores posean títulos de otras sociedades.

c) En el análisis fundamental de valores cotizados en mercados bursátiles y compuestos por carteras de participaciones.

En los tres casos es posible emplear el mismo sistema de análisis, utilizando sólo elsupuesto de que es imposible el arbitraje. Es decir, los valores o precios de las carteras no permiten operaciones exentas de riesgo que generen beneficios netos superiores al tipo de interés. Este punto de vista está bien asentado a partir de Arrow y Debreu, en su análisis del equilibrio general en situaciones de incertidumbre con activos contingentes.

El valor de una sociedad s_1 es la suma de los valores de sus participaciones sobre otras sociedades más el valor de sus activos netos propios. El valor de cada participación puede obtenerse multiplicando el valor total (desconocido) de la sociedad participada por el tanto unitario que representan los títulos de la participación respecto al total.

Si el punto anterior no se cumpliera , resultaría posible el arbitraje, replicando mediante ingeniería financiera los activos totales de cualquier sociedad y venderlos/comprarlos a un precio distinto del de mercado, obteniendo un beneficio inmediato, sin riesgo y sin inmovilización de capital.

Denotando por s_i el valor de la sociedad #i, el valor de la participación de la sociedad #1 sobre la sociedad #2 será $p_{12}\ s_2$ Observamos que el primer subíndice de p se refiere a la sociedad tenedora, y el segundo a la participada. Denotamos por a_1 el valor de la activos netos propios de la sociedad #1.

El valor total de la sociedad #1 puede obtenerse sumando las distintas participaciones sobre otras sociedades más sus activos netos:

$s_1 = p_{11}\ s_1 + p_{12}\ s_2 + ... + p_{1n}\ s_n + a_1$

El término p_{11} , que puede ser nulo, corresponde al tanto unitario de las acciones propias en la autocartera. Observamos que aún distanciándonos en este punto del método de valoración de Mir y Rabaseda (1993), los resultados finales coincidirán siempre, siendo innecesario en nuestro método un trato diferenciado para la autocartera: es una participación más sobre una sociedad más.

Podemos extender la anterior ecuación para el conjunto de n sociedades que posean participaciones en cualquier sociedad y que, a su vez, sean participadas por cualquier sociedad.

$s_1 = p_{11}\ s_1 + p_{12}\ s_2 + ... + p_{1n}\ s_n + a_1$

$s_2 = p_{21}\ s_1 + p_{22}\ s_2 + ... + p_{2n}\ s_n + a_2$

$s_3 = p_{31}\ s_1 + p_{32}\ s_2 + ... + p_{3n}\ s_n + a_3$

....

$s_n = p_{n1}\ s_1 + p_{n2}\ s_2 + ... + p_{nn}\ s_n + a_n$

Representamos matricialmente el anterior sistema de ecuaciones. Siendo **s** el vector de dimensión n de los valores societarios, **a** el vector de dimensión n de los activos netos propios, y **P** la matriz $_{(n \times n)}$ de los coeficientes de participaciones entre empresas, tenemos:

$\mathbf{s = Ps + a}$

Operando sobre la anterior ecuación matricial, obtenemos:

$\mathbf{s - Ps = a}$

$\mathbf{(I - P)\ s = a}$

$\mathbf{s = (I - P)^{-1}\ a}$

A destacar que el último paso sólo es legítimo si la matriz **(I - P)** es no singular. Inmediatamente demostraremos esta no singularidad.

3. Teorema de Frobenius y matrices con diagonal dominante

Karlin (1959) destaca:

> *"Desde 1908 han existido innumerables aplicaciones y extensiones de los resultados de Frobenius... Una colección impresionante de estas extensiones puede encontrarse en Ganmacher y Krein, los cuales además desarrollan la estructura de la teoría de las matrices positivas... Desgraciadamente, los economistas continúan redescubriendo muchos de estos teoremas y les atribuyen propiedades inadecuadas"*

La matriz **P** de participaciones tiene todos sus elementos estrictamente positivos o nulos, y con valores iguales o inferiores a la unidad. En particular, los elementos de su diagonal corresponden a los tantos unitarios de autocartera.

La matriz **(I - P)** tendrá, pues, algunas propiedades interesantes:

(a) Dado que la autocartera no puede superar el 100%, todos los elementos de su diagonal son positivos o nulos.

(b) Dado que la propiedad de cada sociedad corresponde bien a otras sociedades, bien a accionistas propios, la suma de los elementos de cada columna es positivo e inferior o igual la unidad.

(c) Dados que las participaciones son positivas o nulas, cada elemento externo a la diagonal es negativo o nulo.

Las tres propiedades anteriores definen un tipo particular de matrices con diagonal dominante. En álgebra se define como matriz con diagonal dominante aquella que cumple la siguiente propiedad:

La matriz $A = \left[a_{ij}\right]$ tiene una diagonal dominante si existen números positivos d1, d2,..., dn , tales que:

$$d_j \left|a_{jj}\right| > \sum_{i \neq j} d_i \left|a_{ij}\right|, \qquad \text{para } j = 1, 2..., n \qquad \blacksquare$$

La matriz **(I - P)** cumple trivialmente la anterior propiedad, ya que sus únicos elementos positivos son los de la diagonal principal.[1]

Detallamos a continuación el teorema de McKenzie y Hadamard (1959) y esbozamos su demostración:

Teorema

Si una matriz A $_{(nxn)}$ tiene una diagonal dominante, A es no singular.

Demostración

Supongamos A no singular. Existen entonces un vector **x** distinto de cero, tal que B' x = 0, siendo B = D A y D una matriz diagonal con $d_{ij} > 0$ (i=1,2,...,n).

D se ha elegido de manera que tenga una diagonal dominante respecto a D, es decir,

$$\left|b_{ij}\right| > \sum_{i \neq j} \left|b_{ij}\right|, \qquad \text{para } j = 1, 2, ..., n$$

$$\text{Entonces, } x_j b_{jj} + \sum_{i \neq j} x_i b_{ij} = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, ..., n$$

Sea J el conjunto de índices tales que:

$$\left|x_j\right| \geq \left|x_i\right|, \qquad \text{para todo i, cuando } j \in J$$

Entonces tenemos que:

$$\left|x_j\right|\left|b_{jj}\right| \leq \sum_{i \neq j} \left|x_i\right|\left|b_{ij}\right| \leq \sum_{i \neq j} \left|x_j\right|\left|b_{ij}\right| \qquad \text{para } j \in J$$

Finalmente, la última desigualdad contradice el supuesto inicial de que A tiene diagonal dominante. ■

4. Conclusiones

Hasta ahora sólo hemos demostrado que es posible hallar el valor de mercado de las

[1] Sólo en el caso irrelevante que todos los elementos de **(I - P)** fueran nulos, no se cumplirían las condiciones con estricta desigualdad. En el contexto de la consolidación este caso no tiene ningún sentido, ya que se trataría de empresas sin participaciones cruzadas, ni con relaciones de dominio de unas sobre otras. Por tanto, no existiría nada a consolidar.

sociedades con participaciones cruzadas utilizando argumentos de inexistencia de arbitraje y demostrando la existencia de solución general, basándonos en la aplicación de los resultados de Frobenius para demostrar la no singularidad de **(I - P).**

En este contexto, analizamos un caso particular: el vector **a** de activos netos propios de cada sociedad corresponde al valor contable de su neto patrimonial propio. En este caso es inmediato que el valor **s** de las sociedades coincide con su valor contable.

Referencias

Frobenius, G (1908) *Über Matrizen aus Positive Elementen* Sitzungsberichte der Königlichen, pp 471-76

Karlin,S (1959) *Mathematical Methods and Theory in Games, Programmig and Economics* Addisson Wesley, New York

McKenzie L. W. (1959) *Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory* in Mathematical Methods in the social Sciences, Standford

Milne, Frank (1995) *Finance Theory and Asset Pricing* Oxford University Press, Oxford

Mir, J; Rabaseda, J (1993) *El método de los netos virtuales* Cuadernos de Economía Aplicada A 19, Barcelona