

Universidad de Valencia

Universidad del País Vasco

Universidad Complutense de Madrid

Doctorado en Finanzas Cuantitativas

Trabajo de investigación:

**MODELIZACIÓN DEL SPOT Y VALORACIÓN DE FUTUROS DEL GAS
NATURAL**

Alumna: Ana Prieto Lucas

Tutor: Angel León Valle

ÍNDICE:

- 1.Introducción.
- 2.Modelos Spot
 - 2.1.Características
 - 2.2.Datos y estadísticos descriptivos
 - 2.3.Estimación del modelo spot
- 3.Mercado de futuros del gas natural
- 4.Modelos forward
 - 4.1.Modelos spot
 - 4.2.Modelo curva forward
- 5.Datos
- 6.Resultados
 - 6.1.Modelos spot
 - 6.2.Modelo curva forward
- 7.Conclusiones

1. INTRODUCCIÓN.

Este trabajo es un trabajo empírico que consta de dos partes. En primer lugar, se modeliza el comportamiento de la serie de precios semanal del spot del gas natural y en un segundo lugar, que es la parte central de esta investigación, se intenta modelizar el comportamiento de los futuros del gas natural para distintos vencimientos. Para ello, contrastamos diversos modelos teóricos de futuros recogidos en Schwartz (1997) para las series de futuros existentes. La metodología aplicada en la estimación de los parámetros no va a ser la metodología del filtro de Kalman utilizada en Schwartz (1997) debido a la presencia de factores no observados, sino la metodología de Cortázar y Schwartz (2003) que consiste en estimar los parámetros mediante una optimización con mínimos cuadrados ordinarios. Esta metodología resulta ser mucho más sencilla que el filtro de Kalman y fácil de implementar en una hoja de cálculo de Excel utilizando la herramienta del Solver. Otra posible ventaja de esta metodología consiste en su fácil utilización por los “practioners” especializados en commodities.

Los apartados siguientes son: en la sección 2 la modelización del spot, en la sección 3 una breve descripción sobre el funcionamiento del mercado de futuros del gas natural, en la sección 4 una explicación detallada sobre los distintos modelos teóricos de comportamiento del futuro que vamos a utilizar posteriormente, en la sección 5 una descripción de los datos a utilizar, en la sección 6 los resultados obtenidos y finalmente en la sección 7 las conclusiones.

2. MODELOS SPOT.

En esta parte del trabajo se va a intentar estimar, en tiempo discreto, el comportamiento de la serie de precios spot del gas natural. Para su modelización es necesario tener en cuenta una serie de características propias que presenta los commodities (Escribano, Peña.y Villaplana (2002)). Por tanto, en primer lugar se describirán estas propiedades y en segundo lugar se realizará la estimación del modelo.

2.1 Características

Estacionalidad:

La demanda de electricidad en general está muy influenciada por la actividad económica y por las variaciones de las condiciones climáticas. Esto se refleja en los precios de la electricidad, y especialmente en los precios del gas natural, con fuertes subidas y bajadas de manera periódica, es decir con un comportamiento estacional. Pueden aparecer distintos tipos de estacionalidad: intradía, semanal, mensual, por estaciones. Este comportamiento estacional se asumirá que viene reflejado por factores deterministas y, puesto que los datos sobre los que se va a trabajar son semanales, solo se estudiará la estacionalidad mensual y por estaciones. Las funciones que se han elegido para reflejar este comportamiento estarán compuestas por variables dummies mensuales en un caso y por dummies estacionales en el otro. También se podrían utilizar funciones sinusoidales con este fin pero en muchos trabajos se demuestra que se obtienen resultados similares por lo que se ha elegido esta opción por ser la más sencilla.

Reversión a la media:

Se ha demostrado en numerosos trabajos que una propiedad importante que presentan los precios de la electricidad es la de reversión a la media, es decir, el precio revierte a largo plazo a un determinado nivel.

Volatilidad y saltos:

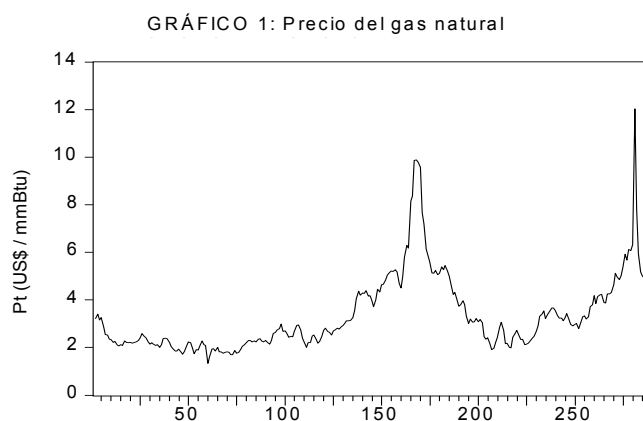
Los precios de la electricidad frecuentemente presentan inesperados y repentinos cambios. Además, después de darse el salto no permanecen en el mismo nivel sino que vuelven al nivel anterior rápidamente. Este comportamiento se debe en muchos casos a las fluctuaciones en la demanda y la poca elasticidad de la oferta, debido a rigideces en el sistema de transmisión y

transporte. Estos saltos se suelen capturar mediante procesos de Poisson como proceso de difusión con saltos (véase Villaplana (2003)).

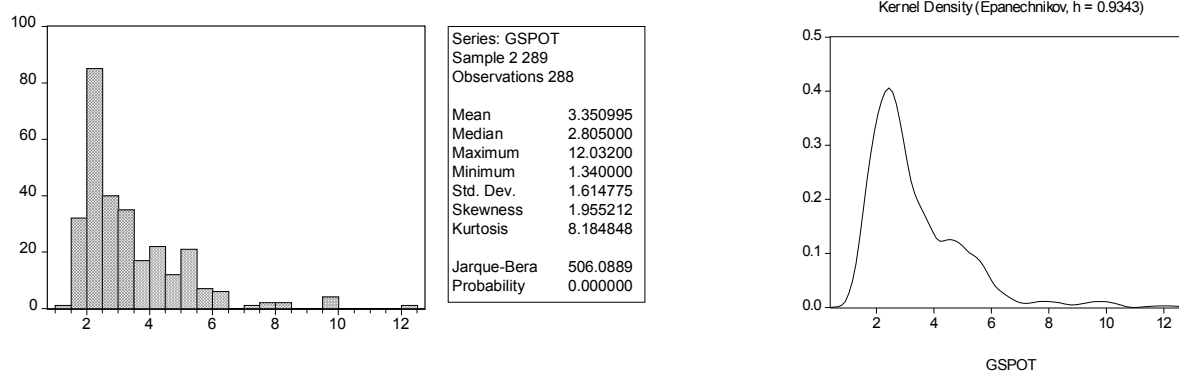
Otro aspecto importante que afecta a los precios de la electricidad es una alta y variable volatilidad así como volatility clustering. Estos comportamientos son consistentes con procesos donde la volatilidad es estocástica y atorregresiva, es decir con los modelos ARCH.

2.2 Datos y estadísticos descriptivos

La serie de precios del spot es una serie de cotización en NYMEX de precios semanales del gas natural Henry Hub en el período entre el 24 de octubre de 1997 y 2 de mayo del 2003. En total tenemos una muestra de 289 observaciones. En el gráfico 1 se muestra la serie temporal anterior.



A continuación se presenta la salida en Eviews de los estadísticos descriptivos así como el histograma y la densidad kernel correspondientes.



Podemos observar como la serie de precios no es normal como podemos ver en el estadístico de Jarque–Bera con un p-valor igual a cero. La serie muestra además asimetría por la derecha y tiene colas largas como podemos observar en el valor de kurtosis. La presencia de una alta kurtosis podría justificar la introducción de modelos con salto (jump processes) aunque no va a ser objeto de estudio en este trabajo. Nótese también como la asimetría viene indicada por la diferencia de valores existente entre la media y la mediana además de la skewness. Por último podemos obtener una mejor visualización de la serie mediante la estimación del kernel.

A continuación presentamos el correlograma (AC) de la serie de precios para los primeros veinte retardos conjuntamente con su correlograma parcial (PAC).

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
. *****	. *****	1	0.945	0.945	259.83	0.000
. *****	. *	2	0.900	0.069	496.48	0.000
. *****	. .	3	0.859	0.014	712.53	0.000
. *****	. .	4	0.818	-0.010	909.16	0.000
. *****	. .	5	0.784	0.047	1090.5	0.000
. *****	. .	6	0.748	-0.027	1256.1	0.000
. *****	. .	7	0.718	0.040	1409.4	0.000
. *****	. .	8	0.684	-0.050	1548.8	0.000
. *****	* .	9	0.644	-0.069	1672.9	0.000
. *****	. *	10	0.625	0.160	1790.2	0.000
. *****	. .	11	0.605	0.019	1900.7	0.000
. ****	. .	12	0.586	-0.006	2004.6	0.000
. ****	. .	13	0.568	0.006	2102.7	0.000
. ****	. .	14	0.546	-0.028	2193.7	0.000
. ****	* .	15	0.520	-0.062	2276.5	0.000
. ****	. .	16	0.497	0.019	2352.3	0.000
. ****	. .	17	0.474	-0.010	2421.5	0.000
. ***	* .	18	0.447	-0.076	2483.5	0.000
. ***	. .	19	0.417	-0.032	2537.4	0.000
. ***	. .	20	0.386	-0.023	2584.0	0.000

Podemos observar a partir de la tabla anterior que la serie presenta una clara estructura AR(1) con fuerte persistencia pero no de carácter tan acusado como para decir que la serie es objeto de evidencia de raíz unitaria. El estadístico Q es el estadístico de Ljung-Box acompañado del p-valor en la última columna. Podemos observar como el estadístico anterior confirma la presencia de autocorrelación en la serie. Aplicando el test de Dickey-Fuller, reflejado en la tabla siguiente, a partir de E-Views, observamos que no hay evidencia de raíz unitaria al 10% pues el valor del estadístico es -2.63356 que resulta ser menor que el valor crítico al 10% que es -2.572.

Null Hypothesis: GAS has a unit root		
Exogenous: Constant		
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=0)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-2.633560	0.0874
Test critical values: 1% level	-3.452911	
5% level	-2.871367	
10% level	-2.572078	
*MacKinnon (1996) one-sided p-values.		

2.3 Estimación del modelo spot

Vamos a ver el comportamiento estacional del serie, para ello presentamos dos alternativas. La primera sería la modelización mensual (mediante 12 dummies indicando cada una de ellas el mes) y la segunda la modelización por estaciones del año (mediante 4 dummies). También se ha hecho para la serie en logaritmo obteniéndose resultados similares pero que no presentamos aquí. A continuación presentamos dos tablas recogiendo las 2 modalidades que acabamos de mencionar, incluyendo la estructura AR(1) significativa que hemos visto en el apartado anterior.

a) Dummies mensuales + AR(1)

Dependent Variable: GSPOT (precio)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 5 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D1	3.728956	0.682400	5.464472	0.0000
D2	3.777395	0.680535	5.550622	0.0000
D3	3.195897	0.677524	4.717024	0.0000
D4	3.322858	0.676527	4.911641	0.0000
D5	3.292961	0.676133	4.870289	0.0000
D6	3.409787	0.682260	4.997782	0.0000
D7	3.352296	0.687056	4.879219	0.0000
D8	3.530356	0.690921	5.109637	0.0000
D9	3.511124	0.693568	5.062405	0.0000
D10	3.696337	0.694580	5.321687	0.0000
D11	3.750502	0.689825	5.436890	0.0000
D12	3.735174	0.686588	5.440201	0.0000
AR(1)	0.952694	0.019029	50.06558	0.0000
R-squared	0.902250	Mean dependent var	3.358065	
Adjusted R-squared	0.897984	S.D. dependent var	1.618608	
S.E. of regression	0.516982	Akaike info criterion	1.562471	
Sum squared resid	73.49934	Schwarz criterion	1.727813	
Log likelihood	-211.9958	F-statistic	211.5243	
Durbin-Watson stat	2.090782	Prob(F-statistic)	0.000000	

Se observa como todas las dummies son significativas y de valores muy parecidos entre sí. Esto sugiere que no existe un efecto mensual debido a la enorme similitud en magnitud de los parámetros. Para estar más seguros se realiza el test de Wald donde se contrasta como hipótesis nula la igualdad de todos los parámetros de las dummies aceptándose finalmente esta hipótesis nula de igualdad. El estadístico chi-cuadrado del contraste anterior es 9.26 con un p-valor de 0.6 a favor, por consiguiente, de la nula. Como conclusión, se sugiere la estimación de un modelo AR(1) con constante.

b) Dummies estaciones + AR(1)

Dependent Variable: GSPOT (precio)					
Method: Least Squares					
Sample(adjusted): 2 289					
Included observations: 288 after adjusting endpoints					
Convergence achieved after 4 iterations					
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.	
DINV	3.472981	0.626107	5.546945	0.0000	
DPRIM	3.538792	0.625482	5.657707	0.0000	
DVER	3.416684	0.630577	5.418350	0.0000	
DOT	3.537189	0.631112	5.604691	0.0000	
AR(1)	0.950251	0.018985	50.05396	0.0000	
R-squared	0.899201	Mean dependent var		3.358065	
Adjusted R-squared	0.897776	S.D. dependent var		1.618608	
S.E. of regression	0.517508	Akaike info criterion		1.537626	
Sum squared resid	75.79158	Schwarz criterion		1.601219	
Log likelihood	-216.4181	F-statistic		631.1430	
Durbin-Watson stat	2.143430	Prob(F-statistic)		0.000000	

Observamos también que las estimaciones de los parámetros de las dummies son similares sugiriendo la no presencia de un efecto por estaciones. Aplicando el test de Wald del mismo modo que en el apartado anterior llegamos a la misma conclusión. En definitiva, mantenemos también la conclusión anterior de AR(1) con constante. Finalmente hay que indicar que las conclusiones obtenidas hasta el momento sobre la serie de precios se mantienen también para la serie en logaritmos.

Obsérvese finalmente como los R-cuadrados de las regresiones anteriores son similares explicando un 90 %. La estimación de AR(1) con constante se observa en la siguiente tabla.

Dependent Variable: GAS (precio)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 3 iterations				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.493466	0.614473	5.685306	0.0000
AR(1)	0.950380	0.018842	50.44054	0.0000
R-squared	0.898949	Mean dependent var		3.358065
Adjusted R-squared	0.898595	S.D. dependent var		1.618608
S.E. of regression	0.515431	Akaike info criterion		1.519293
Sum squared resid	75.98135	Schwarz criterion		1.544731
Log likelihood	-216.7782	F-statistic		2544.248
Durbin-Watson stat	2.141481	Prob(F-statistic)		0.000000

El estadístico Ljung-Box para 20 retardos, LB(20), aplicado sobre la serie de residuos de la regresión anterior es de 8.58 con un p-valor de 0.98 indicando la ausencia de autocorrelación en la serie de residuos. Esto indicaría que la serie AR(1) es suficiente para la modelización de la serie de precios y también, aunque no exponemos aquí, de la serie en logaritmo.

Finalmente vamos a analizar la posible evidencia de heterocedasticidad condicional en las series de precio y log-precio. Observando la serie de residuos al cuadrado en la serie de precios observamos que existe una pequeña estructura en los cuadrados siendo el LB (20) para los residuos al cuadrado de 42 con un p-valor correspondiente de 0.002. Mientras para la serie de log-precio el LB (20) para los residuos al cuadrado es 29.5 con un p-valor de 0.0508. Esto indica que a un 5% no existiría evidencia de estructura en la serie de residuos al cuadrado del log-precio. No obstante, si aplicamos una estructura ARCH(1) o GARCH(1,1) ,por ejemplo, para la serie de precios tenemos que el proceso de la varianza condicional es explosivo no teniendo mucho sentido. Imponiendo estas misma estructura para la serie de log-precio, obtenemos que la parte ARCH resulta ser no significativa como puede verse en las siguientes salidas de E-Views.

a) AR(1)+ARCH(1)

Dependent Variable: LNGAS (log-precio)				
Method: ML - ARCH (Marquardt)				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Variance backcast: ON				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.783876	2.213852	0.805779	0.4204
AR(1)	0.995496	0.013419	74.18365	0.0000
Variance Equation				
C	0.006678	0.000264	25.30244	0.0000
ARCH(1)	0.099423	0.060939	1.631511	0.1028
R-squared	0.952117	Mean dependent var		1.121154
Adjusted R-squared	0.951611	S.D. dependent var		0.406103
S.E. of regression	0.089332	Akaike info criterion		-2.060223
Sum squared resid	2.266386	Schwarz criterion		-2.009349
Log likelihood	300.6721	F-statistic		1882.381
Durbin-Watson stat	1.821702	Prob(F-statistic)		0.000000

Obsérvese la no significatividad del ARCH (1) sobre la serie del log-precio. Un resultado similar de no significatividad obtenemos para un ARCH (2), etc.

b) AR(1)+GARCH(1,1)

Dependent Variable: LNGAS (log-precio)				
Method: ML - ARCH (Marquardt)				
Sample(adjusted): 2 289				
Included observations: 288 after adjusting endpoints				
Convergence not achieved after 500 iterations				
Variance backcast: ON				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.265449	0.568387	2.226386	0.0260
AR(1)	0.988984	0.013932	70.98714	0.0000
Variance Equation				
C	0.002405	0.001389	1.731311	0.0834
ARCH(1)	0.088308	0.055163	1.600875	0.1094
GARCH(1)	0.593161	0.214473	2.765671	0.0057
R-squared	0.952300	Mean dependent var		1.121154
Adjusted R-squared	0.951626	S.D. dependent var		0.406103
S.E. of regression	0.089319	Akaike info criterion		-2.060578
Sum squared resid	2.257724	Schwarz criterion		-1.996985
Log likelihood	301.7232	F-statistic		1412.483
Durbin-Watson stat	1.816826	Prob(F-statistic)		0.000000

Nuevamente obsérvese como el parámetro del ARCH(1) no es significativo mientras el parámetro del GARCH(1) es significativo. Por último una estimación GARCH(1,2) también se ha realizado resultando ser no significativo el parámetro del GARCH(2). En definitiva, el modelo GARCH (1,1) que se presenta aquí resulta ser no explosivo para la serie de precios del log-precio y sería el candidato.

En resumen, el modelo que candidato sobre el la serie log-precio es un modelo AR(1) con constante y estructura GARCH (1,1) presentado en la última tabla.

3. MERCADO DE FUTUROS DEL GAS NATURAL.

El mercado de futuros NYMEX del gas Natural tiene las siguientes características:

Las unidades en las que se negocian estos contratos son 10000 millones de British thermal units (MMBtu) y el pago se realiza en dólares y céntimos (por MMBtu).

Las fluctuaciones máxima y mínima que se le permite tener al precio son las siguientes: la mínima es de 0.001 dólares (0.1 céntimo) por MMBtu la máxima, sin embargo está en los 1.5 dólares por MMBtu (15000 dólares por contrato) para los dos primeros meses. En el caso de un movimiento de 0.75 dólares por MMBtu en alguno de los dos primeros meses de contrato, el límite para el resto de meses se queda en 0.75 dólares por MMBtu

Los meses de negociación actualmente son 36 meses consecutivos y la negociación termina tres días antes del primer día del mes de entrega.

Existen unos límites en las posiciones que se pueden tomar: No se puede exceder los 7000 contratos para todos los meses combinados ni los 1000 contratos en los últimos tres días de negociación en el spot month o 5000 en cualquier mes.

La entrega se efectúa en Henry Hub, un lugar situado en el estado de Louisiana, Estados Unidos. El vendedor es el responsable de trasladar el gas natural hasta este punto y el comprador lo es desde este lugar a cualquier otro. La cuota corre a cuenta del vendedor.

El periodo de entrega establecido es el siguiente: La entrega no debe efectuarse antes del primer día del mes de entrega y de debe llevar a cabo no después del último día del mes de entrega. Sin embargo existe un procedimiento alternativo de entrega: Si el comprador y el vendedor acuerdan consumir la entrega en condiciones diferentes a las acordadas en un principio en el contrato pueden llevarla a cabo después presentar una notificación al Exchange.

4. MODELOS FORWARD.

Esta parte del trabajo consta de dos secciones. En la primera se tratará de modelizar los precios de contratos forward a partir de modelos spot (Schwartz (1997), Lucia y Schwartz, (2001)) y en la segunda estos contratos se modelizarán directamente a partir de la curva forward (Clewlow y Strickland (2000)). Los datos que se utilizarán en ambos casos son las cotizaciones de precios semanales de los futuros del gas natural en Henry Hub que cotizan en NYMEX.

4.1. Modelos spot.

a) Modelo

En esta sección se considerarán aquellos modelos que explican el comportamiento de los contratos derivados de los precios de la electricidad a partir del comportamiento del precio de la electricidad (spot). Los precios de estos derivados (en nuestro caso únicamente se estudiarán los contratos forward) se obtienen a partir de una fórmula analítica que depende de los precios spot.

El modelo teórico que se analizará está basado en los modelos de uno, dos y tres factores de Schwartz (1997).

En el modelo de un factor Schwartz asume que el precio del spot sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dS = \kappa(\mu - \ln S)Sdt + \sigma Sdz$$

Si definimos X como $X = \ln S$ y aplicamos el Lema de Ito, podemos observar que el logaritmo del precio viene caracterizado por un proceso Ornstein-Uhlenbeck:

$$dX = \kappa(\alpha - X)dt + \sigma dz$$

$$\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa}$$

Este modelo, bajo la medida equivalente de martingala tiene la siguiente forma:

$$dX = \kappa(\alpha^* - X)dt + \sigma dz^*$$

donde $\alpha^* = \alpha - \lambda$, y λ es el precio de riesgo de mercado (que se supone constante). dz^* es el movimiento browniano geométrico bajo la medida equivalente de martingala.

Suponiendo un tipo de interés constante, el precio de los futuros (o forward) con vencimiento en T es el precio esperado del subyacente en T bajo la medida equivalente de martingala. Por lo tanto, se obtiene fácilmente que:

$$F(S, T) = \exp \left[e^{-\kappa T} \ln S + (1 - e^{-\kappa T}) \alpha^* + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa T}) \right]$$

El modelo de dos factores considera que, tanto el precio del spot como el convenience yield son variables estado que siguen un proceso de reversión a la media.

Si definimos S como el precio spot del gas antural y δ como el convenience yield instantáneo, Schwartz (1997) propone la siguiente dinámica para ambos:

$$\begin{aligned} dS &= (\mu - \delta)Sdt + \sigma_1 dz_1 \\ d\delta &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2 \\ dz_1 \text{ y } dz_2 &\sim N(0, dt^{1/2}) \quad dz_1 dz_2 = \rho dt \end{aligned}$$

En este modelo, μ representa el rendimiento total a largo plazo, κ el coeficiente de reversión a la media, α el convenience yield a largo plazo, σ_1 y σ_2 las volatilidades del precio spot y del convenience yield respectivamente y ρ es el coeficiente de correlación de los dos procesos estocásticos. Bajo la probabilidad neutral al riesgo, el modelo adquiere la siguiente forma:

$$\begin{aligned} dS &= (r - \delta)Sdt + \sigma_1 dz_1^* \\ d\delta &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2^* \\ dz_1^* dz_2^* &= \rho dt \end{aligned}$$

donde r es el tipo de interés libre de riesgo y λ es el precio de riesgo del convenience yield.

A partir de estos procesos se puede deducir que los precios de los futuros tienen que satisfacer la siguiente ecuación en diferencias parciales:

$$\frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 F_{\delta\delta} + \sigma_1 \sigma_2 \rho S F_{S\delta} + (r - \delta) S F_S + [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda] F_\delta - F_T = 0$$

sujeto a la condición terminal: $F(S, \delta, 0) = S$.

La solución a esta ecuación diferencial (Jamshidian and Fein (1990) y Bjerk Sund (1991)) es la siguiente:

$$F(S, \delta, T) = S \exp \left[-\delta \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} + \left(r - \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2 \rho}{\kappa} \right) T + \frac{1}{4} \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\kappa T}}{\kappa^3} + \left(\hat{\alpha} \kappa + \sigma_1 \sigma_2 \rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa} \right) \frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa^2} \right]$$

donde: $\hat{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda}{\kappa}$

Los autores Cortazar y Schwartz (2003) presentan una modificación de este modelo con el objeto de reducir el número de parámetros a estimar. Definen dos nuevas variables de estado y y v . y la definen como la diferencia entre el convenience yield instantáneo, δ , y el convenience yield a largo plazo, α y v como la diferencia entre el rendimiento total a largo plazo, μ , y el convenience yield a largo plazo, α :

$$y \equiv \delta - \alpha$$

$$v \equiv \mu - \alpha$$

De este modo, el modelo se transforma en:

$$dS = (v - y)Sdt + \sigma_1 dz_1$$

$$dy = -\kappa y dt + \sigma_2 dz_2$$

$$dz_1 dz_2 = \rho dt$$

En este modelo los autores tratan ambos factores, S e y como variables estado no negociables por lo que, para escribirlo bajo la probabilidad neutral al riesgo asignan un precio de riesgo (risk premium) a cada factor (λ_i es el precio de riesgo del factor i). El modelo de dos factores modificado tiene la siguiente forma bajo la probabilidad neutral al riesgo:

$$dS = (v - y - \lambda_1)Sdt + \sigma_1 dz_1^*$$

$$dy = (-\kappa y - \lambda_2)dt + \sigma_2 dz_2^*$$

$$dz_1^* dz_2^* = \rho dt$$

El modelo de tres factores que presenta Schwartz (1997) añade al modelo de dos factores un tercer factor: el tipo de interés instantáneo, r . Supone que r sigue un proceso estocástico del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Bajo la medida neutral al riesgo el modelo de tres factores propuesto por Schwartz (1997) es el siguiente:

$$\begin{aligned} dS &= (r - \delta)Sdt + \sigma_1 S dz_1^* \\ d\delta &= [\kappa(\alpha - \delta) - \lambda]dt + \sigma_2 dz_2^* \\ dr &= a(m^* - r)dt + \sigma_3 dz_3^* \\ dz_1^* dz_2^* &= \rho_{12} dt; \quad dz_2^* dz_3^* = \rho_{23} dt; \quad dz_1^* dz_3^* = \rho_{13} dt; \end{aligned}$$

siendo a y m^* la velocidad de ajuste y el tipo de interés a corto plazo bajo la neutralidad al riesgo respectivamente.

Sin embargo, en este modelo, Schwartz (1997) no estima el tipo de interés libre de riesgo a partir de los precios de los forward sino de los precios de los bonos. Por este motivo, Cortazar y Schwartz (2003) proponen otro modelo de tres factores que tiene como base el modelo modificado de dos factores explicado anteriormente. Este modelo de tres factores introduce como tercer factor el rendimiento a largo plazo del precio del spot, v . Éste también sigue un proceso estocástico cuyo término a largo plazo al que revierte es $\bar{v}$ y con coeficiente de reversión a la media a y volatilidad σ_3 . En este tercer factor se incluyen las perturbaciones del tipo de interés libre de riesgo, pero no se limita únicamente a ellas.

La dinámica de las variables estado del modelo de tres factores de Cortazar y Schwartz (2003) es la siguiente:

$$\begin{aligned} dS &= (v - y)Sdt + \sigma_1 S dz_1 \\ dy &= -\kappa y dt + \sigma_2 dz_2 \\ dv &= a(\bar{v} - v)dt + \sigma_3 dz_3 \\ dz_1 dz_2 &= \rho_{12} dt; \quad dz_2 dz_3 = \rho_{23} dt; \quad dz_1 dz_3 = \rho_{13} dt; \end{aligned}$$

Definiendo λ_i como el precio del riesgo del factor i , el modelo anterior se puede escribir, bajo la neutralidad al riesgo como:

$$\begin{aligned} dS &= (v - y - \lambda_1)Sdt + \sigma_1 S dz_1^* \\ dy &= (-\kappa y - \lambda_2)dt + \sigma_2 dz_2^* \\ dv &= a((\bar{v} - v) - \lambda_3)dt + \sigma_3 dz_3^* \\ dz_1^* dz_2^* &= \rho_{12} dt; \quad dz_2^* dz_3^* = \rho_{23} dt; \quad dz_1^* dz_3^* = \rho_{13} dt; \end{aligned}$$

Bajo este modelo, los precios de los futuros deben satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S^2 F_{SS} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S^2 F_{yy} + \frac{1}{2}\sigma_3^2 S^2 F_{vv} + \sigma_1\sigma_2\rho_{12}SF_{Sy} + \sigma_1\sigma_3\rho_{13}SF_{Sv} + \sigma_2\sigma_3\rho_{213}SF_{yv} + (v - y - \lambda_1)SF_y + a((\bar{v} - v) - \lambda_3)F_v - F_T = 0$$

Sujeto a la condición de contorno: $F(S, y, v, T=0) = S$. La solución a esta ecuación diferencial es:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{4}{4} \frac{2}{2} \frac{3}{3} \right) \frac{1}{()} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{4}{4} \frac{2}{2} \frac{3}{3} \right) \frac{1}{()} \right)]$$

b) Estimación del modelo

Schwartz (1997) utiliza como método de estimación de los modelos el filtro de Kalman. Una de las ventajas que presenta utilizar este procedimiento, además de la estimación de los parámetros, es que proporciona intervalos de confianza. Sin embargo su implementación, además de ser algo compleja, necesita requerimientos, como que no haya observaciones vacías en los datos (algo particularmente frecuente en contratos de futuros), a veces difíciles de conseguir.

Por estos motivos Cortazar y Schwartz (2003) proponen un procedimiento de estimación más sencillo mediante una optimización por mínimos cuadrados ordinarios.

Para calibrar el modelo se utilizan precios de futuros de N fechas (en nuestro caso N será igual a 296, datos semanales desde el 1 de septiembre de 1997 hasta el 28 de abril de 2003) y por cada fecha hay M_i contratos con diferentes vencimientos (en este caso M_i con $i = 1, \dots, 36$). El procedimiento de implementación, brevemente resumido, es el siguiente: con unos valores iniciales