

El Coste del Colateral

Francisco J. Callado Muñoz

Junio 2003

Francisco José Callado Muñoz
Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía de la Empresa
c/ Madrid 126,
28903 Getafe (Madrid)
Tel : (91) 624-9572 Fax : (91) 624-9608
e-mail: fcallado@eco.uc3m.es

El Coste del Colateral

Resumen

En este trabajo se realiza una evaluación y estimación del coste de uso de activos de garantía en las operaciones de política monetaria de los bancos centrales teniendo en cuenta el grado de flexibilidad en la definición de los instrumentos elegibles así como los distintos modos de depósito. A diferencia de trabajos anteriores se presenta un modelo analítico que permite estimar la función de pérdida que supone a los agentes el requerimiento de inversión en dichos activos y la desviación que implica respecto a la cartera óptima. Los resultados apoyan la adopción de políticas de colateral que restrinjan en la menor medida posible las decisiones de cartera de las entidades siempre que esto sea, lógicamente, compatible con la adecuada cobertura de los riesgos contraídos por los bancos centrales en sus operaciones de crédito. Al mismo tiempo, sugiere la relevancia de buscar, dentro del Eurosistema, sistemas homogéneos de depósito del colateral con objeto de evitar distorsiones competitivas que, según el análisis efectuado, pudieran ser relevantes.

Palabras clave: Colateral, Política Monetaria

El Coste del Colateral

1. Introducción

La principal responsabilidad de los bancos centrales es la definición e instrumentación de la política monetaria. En la actualidad, las actuaciones de las autoridades monetarias se dirigen prioritariamente al logro y el mantenimiento de la estabilidad de precios, si bien se establecen otros objetivos secundarios que en el caso del BCE se concretan en el apoyo de las diferentes políticas de la Unión Europea (BCE, 2000).

La forma en la que el banco central instrumenta habitualmente las decisiones de política monetaria es a través de operaciones de inyección o de drenaje de liquidez por las que equilibra la demanda y la oferta de reservas bancarias al tipo deseado.

En la mayor parte de los principales países industrializados, el sistema bancario se encuentra en una posición estructural de liquidez deficitaria por lo que el banco central actúa prioritariamente a través de operaciones de crédito por los que se suministra temporalmente liquidez a las entidades bancarias.

Dado que en estas operaciones de crédito existe un riesgo de impago de la contrapartida, el banco central aplica medidas de control de riesgo entre las que se encuentra la exigencia de activos que garanticen las operaciones hasta el vencimiento. La política de elegibilidad de los activos que pueden ser utilizados para este fin encuentra ciertas diferencias entre los diferentes bancos centrales. Así, la Reserva Federal permite el uso de un solo tipo de activos de garantía: deuda emitida por el gobierno de los Estados Unidos. Por el contrario, en el modelo del Eurosistema, se ha confeccionado una lista de activos elegibles en la que aparecen diferentes tipos de activos emitidos tanto por instituciones públicas como privadas.

Además de esta mayor flexibilidad en los criterios de elegibilidad de los activos utilizados para garantizar operaciones de política monetaria, el Eurosistema permite dos mecanismos para la movilización de este colateral: cesta de activos (“pool”) y sistema individualizado (“earmarking”). Según el sistema de cesta, la entidad que recibe liquidez del banco central mantiene a disposición de este un conjunto de activos elegibles que sirven para garantizar la totalidad de la posición deudora con la autoridad monetaria. Los instrumentos no son así asignados a operaciones concretas por lo que la composición de la cesta puede ser modificada en todo momento. En el sistema individualizado, cada operación de crédito, típicamente instrumentada a través de una cesión temporal de activos

El Coste del Colateral

(repo), lleva asociada unos activos de garantía concretos que, normalmente, permanecen inmovilizados durante la vida de la operación.

La necesidad de garantizar las operaciones con el banco central con una determinada clase de activos puede acarrear un coste para las entidades financieras. La magnitud de este coste dependerá en gran parte de cual sea la composición de las carteras óptimas de dichas instituciones y de la confección de lista de activos elegibles como garantía. Si los bancos poseen suficientes activos elegibles en sus balances no tendrán coste alguno al utilizarlos en estas operaciones. Si por el contrario, estos no son suficientes, podría existir un coste provocado por la necesidad de acometer una desviación de la cartera óptima.

Además de la necesidad de cubrir cada operación, las implicaciones de cada uno de los sistemas de depositar la garantía pueden ser diferentes. Si se utiliza el sistema de cesta, en cualquier momento se pueden modificar los activos depositados de acuerdo con las necesidades de inversión. Por el contrario, en un sistema individualizado, la entidad, debe asumir el coste de no disponer de la capacidad de variar la composición de su cartera, en caso de que se reduzca el atractivo de los activos que tiene depositados como garantía o se incremente, como consecuencia de la variación en los precios en el mercado, la proporción que estos suponen en el valor de total de la cartera por encima de lo deseado.

La diferencia entre ambos procedimientos puede ser relevante ya que en general los bancos no pueden elegir libremente cuál es el mecanismo que prefiere en sus relaciones con los bancos centrales del Eurosistema. La existencia o no de cada procedimiento en un determinado país depende tanto de la jurisdicción nacional, como de los sistemas operativos establecidos en el mismo¹. Por tanto, las entidades que operan en un país en el que solo es posible el sistema individualizado pueden encontrarse en una situación de inferioridad frente a instituciones que pueden utilizar ambos sistemas. Por otra parte, aunque en algunos países se empleen ambos sistemas, a menudo existen costes administrativos que desincentivan el uso de uno u otro.

¹ En el documento del BCE (2002) sobre La Política Monetaria Única en la Zona del Euro, se indica que “Dependiendo tanto de la jurisdicción como de los sistemas operativos nacionales, los bancos centrales nacionales permiten que los activos de garantía se mantengan en un fondo común y/o exigen que los activos utilizados en cada transacción estén identificados individualmente.”. Por tanto, en algunos países se tendrá acceso a ambos sistemas y en otros o bien a uno o a otro.

El Coste del Colateral

Una referencia relevante en la literatura sobre estimación del coste de uso de colateral es Rochet y Tirole (1996(a)), que consideran que este coste está asociado al coste de oportunidad de invertir en instrumentos elegibles en lugar de otros más rentables. Siguiendo este línea, Rossi (1998) realiza una identificación y estimación de los distintos costes: administrativos, de financiación, de capital y de oportunidad, sin tener en cuenta los costes de no invertir de manera óptima, ni el coste de inmovilización de los activos depositados. Humphrey (1995), Folkerts-Landau et. al.(1996) estiman el coste de colateral a partir de la diferencia entre el tipo de interés de un crédito no asegurado y el de uno colateralizado. En todos estos trabajos se realizan cálculos, relativamente ad-hoc, del coste que supone la necesidad de colateralizar préstamos, pero no ofrecen un modelo analítico que permita estimar la función de pérdida que supone a los agentes esta restricción como consecuencia de la desviación que implica respecto a la cartera óptima.

El objetivo de este trabajo es en primer lugar, presentar un modelo de decisión que permita evaluar y estimar el coste, en términos de utilidad esperada, que la exigencia de garantías implica para las entidades. Además se comparan los costes que los dos modos de depósito de la garantía utilizados –cesta e individualizado- en el Eurosistema suponen para las entidades participantes en las operaciones de crédito del BCE.

El resto del trabajo se organiza como sigue. El apartado 2 presenta la metodología utilizada en el estudio. El apartado 3 expone el modelo general sin restricciones. En el apartado 4 se analiza el coste de las restricciones de disponibilidad de activos de garantía en función de los criterios de elegibilidad del banco central. En el punto 5 se aborda la comparación entre los diferentes modos de depósito de garantías. Finalmente, en el punto 6 se recogen las principales conclusiones.

2. Estrategia de Análisis

El análisis se realiza a partir de un modelo de optimización de cartera en tiempo continuo con tres activos diferentes en el mercado. Para llevar a cabo el análisis del coste de la política de garantías en función de la variedad de activos elegibles se procede de la siguiente forma. En primer lugar, se resuelve el problema general de la determinación de la cartera óptima que se corresponde con el caso en que el uso de activos de garantía no tiene ningún efecto en la política de inversión de la entidad. A continuación se introduce en el

El Coste del Colateral

esquema anterior un nivel mínimo de activos de garantía que debe estar presente en la cartera del banco². Se obtiene cual sería la cartera óptima para un banco que se enfrenta a este tipo de restricción. A partir de estos dos resultados se comparan ambas soluciones en términos de diferencias de utilidad esperada y se traduce esta a unidades monetarias. Con el objeto de analizar los efectos de la flexibilidad en la elección de activos de garantía se comparan los resultados en dos situaciones diferentes: cuando solo un tipo de activo es elegible como colateral y cuando existe una mayor variedad de elección.

Para analizar la influencia del sistema de movilización de los activos (cesta o individual) se calibran, en primer lugar, los costes asociados a desviaciones de la cartera óptima a lo largo de la vida del préstamo como consecuencia de un cambio en las proporciones iniciales debido a una variación en el precio relativo de los activos inmovilizados. Posteriormente, se repite el ejercicio en el caso en que se produzca, además, una variación no anticipada en la distribución de rendimientos de los activos de modo que se modifique el atractivo de los distintos instrumentos elegibles. A lo largo de la vida del préstamo, la evolución del valor de la cartera o un cambio en las preferencias de la entidad puede modificar la estrategia de inversión. En el sistema de cesta se podría producir una reorganización de la cartera y de la composición de los activos depositados logrando la cartera óptima mientras que en el sistema individual no sería posible por la inmovilización de los correspondientes activos.

3. Modelo General sin Restricciones

Supongamos que el conjunto de oportunidades de inversión se compone de tres activos: uno libre de riesgo (ALR) y dos con riesgo (AR1 y AR2). La evolución del precio de los cada uno de los activos en este caso viene determinada por los procesos estocásticos:

$$\text{ALR:} \quad \frac{dB(t)}{B(t)} = r \cdot dt$$

$$\text{AR1:} \quad \frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = \mu_1 \cdot dt + \sigma_1 \cdot d\omega(t)$$

² Este proceder es similar al utilizado en Gourieroux y Jouneau (1999) y Sentana (2001) aunque el objetivo de los mismos es distinto y se sitúan dentro de la teoría de selección de carteras introducida por Markowitz (1952)

El Coste del Colateral

$$\text{AR1: } \frac{dS_2(t)}{S_2(t)} = \mu_2 \cdot dt + \sigma_2 \cdot d\omega(t) \quad (1)$$

Donde B es el precio del bono sin riesgo y S_1 y S_2 el de los dos activos con riesgo, (μ_1, μ_2) son las medias de la rentabilidad de los dos activos con riesgo, (σ_1, σ_2) son sus desviaciones estándar, y r es la rentabilidad del activo sin riesgo. Se supone que AR2 tiene una mayor varianza y mayor rentabilidad esperada que AR1 ($\mu_1 < \mu_2, \sigma_1 < \sigma_2$). La covarianza entre los dos activos con riesgo se denota por σ_{12} .

Derivación de la Cartera Óptima

Dada la estructura de mercado presentada, el problema a solucionar por parte de la entidad financiera para obtener su cartera óptima sería el siguiente,

$$\begin{aligned} \text{Max } & \frac{1}{1-\gamma} E[x(1)^{1-\gamma}] \\ & \{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\} \\ \text{s.a. } & dx(t) = [(1-\alpha_1(t)-\alpha_2(t))r + \alpha_1(t)\mu_1 + \alpha_2(t)\mu_2]x(t)dt \\ & + x(t)\sigma(\alpha_1(t)S_1 + \alpha_2(t)S_2)dw(t) \\ & x_0 = c_0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde α_1 y α_2 son las proporciones de inversión en AR1 y en AR2 respectivamente y x es la riqueza de la entidad. Las proporciones óptimas de inversión que se obtienen del anterior programa de maximización (ver Merton (1969)) son:

$$\begin{aligned} \alpha_1^* &= \frac{(\mu_1 - r)\sigma_2^2 - (\mu_2 - r)\sigma_{12}}{\gamma(\sigma_2^2\sigma_1^2 - \sigma_{12}^2)} \\ \alpha_2^* &= \frac{(\mu_2 - r)\sigma_1^2 - (\mu_1 - r)\sigma_{12}}{\gamma(\sigma_2^2\sigma_1^2 - \sigma_{12}^2)} \\ 1 - \alpha_1^* - \alpha_2^* &= 1 - \frac{(\mu_1 - r)(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + (\mu_2 - r)(\sigma_1^2 - \sigma_{12})}{\gamma(\sigma_2^2\sigma_1^2 - \sigma_{12}^2)} \end{aligned} \quad (3)$$

Función de Utilidad

La función indirecta de utilidad asociada con estas proporciones de inversión en cada uno de los activos sería la siguiente:

El Coste del Colateral

$$J(x,T) = \frac{1}{1-\gamma} g^*(T) x^{1-\gamma}$$

$$g^*(T) = \exp \left[T(1-\gamma) \left(r + \frac{1}{2\gamma} \frac{(\mu_1 - r)^2 \sigma_2^2 + (\mu_2 - r)^2 \sigma_1^2 - 2(\mu_2 - r)(\mu_1 - r)\sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \right) \right] \quad (4)$$

Estos resultados son el punto de partida sobre el que se realizará la comparación con el caso en que las entidades se encuentren restringidas en su comportamiento inversor debido a la necesidad de adquirir una determinada proporción de activos elegibles.

4. Criterios de Elegibilidad

Supongamos en esta sección que la entidad tiene unas necesidades de liquidez que representan una proporción K de su cartera inicial³, que debe abastecer mediante préstamos del banco central. Para obtener este crédito, debe disponer de activos de garantía suficientes, siguiendo los criterios establecidos por el banco central.

4.1 Un activo elegible

Supongamos en primer lugar que solo es elegible como colateral el activo libre de riesgo, en línea con los criterios utilizados por la Reserva Federal donde solo la deuda pública es aceptada como colateral. Si el banco tuviese en su balance un volumen de activos sin riesgo superior a K , la necesidad de colateralizar el préstamo no afecta a su decisiones de cartera. Sin embargo, si se supone que con la proporción óptima de inversión en activos elegibles, el banco, no tienen suficiente para cubrir sus necesidades de liquidez vería restringido su comportamiento. Para colateralizar los créditos recibidos del banco central la entidad aumentaría su porcentaje de inversión en el activo sin riesgo desviándose de la cartera óptima. El problema al que se enfrentaría el banco sería el siguiente,

$$\text{Max} \quad \frac{1}{1-\gamma} E[x(1)^{1-\gamma}]$$

³ Nótese que la proporción k no significa que el montante del crédito de política monetaria corresponda a esa proporción de la riqueza. Para asegurar todas sus operaciones frente a posibles cambios en el precio de los activos, el BCE ha establecido una serie de medidas de control de riesgos (BCE, 2002). Estas medidas incluyen el establecimiento de un margen inicial y además unos recortes de valoración sobre el precio de cada activo. Estos recortes de valoración van desde un 0%, para los activos con menor riesgo, hasta un 20% como mínimo si se trata de acciones. Por tanto, si el crédito obtenido por un banco fuese de 100 euros, las necesidades de colateral serían de 136 en el caso de utilizar acciones y entre 102 si se tratase de un instrumento con el mínimo recorte.

El Coste del Colateral

$$\begin{aligned}
 & \{\alpha_0(t), \alpha_1(t)\} \\
 & \text{s.a. } dx(t) = [\alpha_0(t) r + \alpha_1(t) \mu_1 + (1 - \alpha_1(t) - \alpha_0(t)) \mu_2] x(t) dt \\
 & + x(t) \sigma(\alpha_1(t) S_1 + (1 - \alpha_1(t) - \alpha_0(t)) S_2) dw(t) \\
 & \alpha_0(t) \geq k
 \end{aligned} \tag{5}$$

donde α_0 es la proporción invertida en el activo libre de riesgo. Una vez establecido el límite mínimo de inversión en activos elegibles se determina cuales serían las proporciones de inversión óptima en el resto de activos en función de esta restricción. Cuando ésta es vinculante la riqueza del banco evolucionaría de acuerdo con la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned}
 dx(t) = & [k r + \alpha_1(t) \mu_1 + (1 - k - \alpha_1(t)) \mu_2] x(t) dt + x(t) \sigma(\alpha_1(t) S_1 \\
 & + (1 - k - \alpha_1(t)) S_2) dw(t)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Resolviendo el problema general incluyendo esta ecuación se obtienen las proporciones que se presentan a continuación,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^* &= \frac{(\mu_1 - \mu_2) + \gamma(1 - k)(\sigma_2^2 - \sigma_{12})}{\gamma(\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_{12})} \\
 \alpha_2^* &= \frac{(\mu_2 - \mu_1) + \gamma(1 - k)(\sigma_1^2 - \sigma_{12})}{\gamma(\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_{12})}
 \end{aligned} \tag{7}$$

La proporción de inversión en ambos activos arriesgados disminuye ante aumentos en la necesidad de colateral si la correlación entre los mismos es negativa. Si la correlación es positiva, aumentos en K disminuyen el nivel de inversión en AR1 dado que su varianza es menor que la de AR2. En el caso de AR2, la relación será negativa si la aportación al riesgo de AR2 es menor que la desviación típica de AR1 ($\rho\sigma_2 < \sigma_1$) y positiva en caso contrario. Con correlación positiva, y $\rho\sigma_2 < \sigma_1$ se estaría produciendo una transferencia de inversión desde el activo arriesgado con menor varianza y menor rendimiento esperado hacia el más arriesgado y con mayor rentabilidad esperada con objeto de compensar el efecto de la restricción sobre el riesgo de la cartera. Si la correlación fuese lo suficientemente baja o negativa el aumento de la inversión en el activo sin riesgo implicaría una reducción en ambos activos arriesgados, dado que al disminuir la inversión en uno de los activos se lograría una mejor diversificación si se reduce también la del otro.

La función indirecta de utilidad asociada a este problema con restricción sobre el activo sin riesgo sería la siguiente:

El Coste del Colateral

$$J(x,T) = \frac{1}{1-\gamma} g^{-1}(T) x^{1-\gamma}$$

$$g^{-1}(T) = \exp \left[T(1-\gamma) \left(kr + (1-k)\mu_2 + \frac{1}{2\gamma} \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2} - \frac{1}{2} (1-k)^2 \gamma \sigma_2^2 + a(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \gamma, k) \right) \right]$$

$$\text{Con } a(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \gamma, k) = \frac{(\sigma_{12}^2 - \sigma_2^2)(1-k)(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2} + \frac{1}{2} \gamma \frac{(\sigma_{12}^2 - \sigma_2^2)^2 (1-k)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2} \quad (8)$$

4.2 Dos Activos Elegibles

Supongamos ahora que existen dos activos elegibles: el activo libre de riesgo y el activo arriesgado con menor varianza. De este modo se pretende aproximar criterios de elegibilidad flexibles, como los utilizados por el Eurosistema, donde se aceptan no solo activos de deuda pública sino también privada e incluso acciones de empresas solventes. Si el banco recibe un crédito de política monetaria podrá utilizar ambos activos elegibles para cubrir la operación, así, la restricción de colateral afecta a la suma de las proporciones de inversión en los dos activos utilizables como garantía. El problema al que se enfrentaría el banco sería el siguiente,

$$\begin{aligned} & \text{Max } \frac{1}{1-\gamma} E[x(1)^{1-\gamma}] \\ & \{\alpha_0(t), \alpha_1(t)\} \\ & \text{s.a. } dx(t) = [\alpha_0(t) r + \alpha_1(t) \mu_1 + (1-\alpha_1(t)-\alpha_0(t)) \mu_2] x(t) dt \\ & \quad + x(t) \sigma(\alpha_1(t) S_1 + (1-\alpha_1(t)-\alpha_0(t)) S_2) dw(t) \\ & \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \geq k \end{aligned} \quad (9)$$

Una vez establecido el límite mínimo de inversión en activos elegibles se determina cuales serían las proporciones de inversión óptima en estos activos. Cuando la restricción es efectiva se obtiene la siguiente igualdad:

$$\alpha_0 = k - \alpha_1$$

y la riqueza del banco evolucionaría de acuerdo con la siguiente ecuación,

$$dx(t) = [(k - \alpha_1(t)) r + \alpha_1(t) \mu_1 + (1-k) \mu_2] x(t) dt + x(t) \sigma(\alpha_1(t) S_1 + (1-k) S_2) dw(t) \quad (10)$$

Resolviendo el problema general incluyendo esta ecuación se obtienen las proporciones que se presentan a continuación,

El Coste del Colateral

$$\alpha_0^* = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} - \frac{(\mu_1 - r)}{\gamma\sigma_1^2} + k \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\sigma_1^2}$$

$$\alpha_1^* = \frac{(\mu_1 - r)}{\gamma\sigma_1^2} - (1-k) \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} \quad (11)$$

El cambio en la proporción de inversión en el activo con riesgo ante cambios en K depende del signo de la covarianza entre los dos activos arriesgados. Si esta es positiva, α_1 crece cuando aumente el nivel de activos elegibles requeridos. Este aumento se podría explicar como una sustitución de activo no-elegible por el activo arriesgado elegible en la cartera óptima. Si por el contrario la correlación fuese negativa la relación sería la contraria. Al disminuir la inversión en el activo no elegible, la mejor diversificación se obtendría reduciendo también la del activo elegible. En cuanto a la proporción invertida en el activo libre de riesgo, su evolución ante cambios en k dependería del signo de la covarianza y del cociente entre esta y la varianza del activo elegible. Si la covarianza fuese negativa, aumentos en la restricción supondrían un aumento en la inversión en el activo sin riesgo. Si es positiva se podrían distinguir dos casos: la covarianza fuera mayor o menor que la varianza del activo elegible. Si fuera menor, se produciría un aumento de la inversión en el activo sin riesgo. Si por el contrario fuera mayor, se produciría una disminución.

Un aspecto interesante es comprobar si el establecimiento de este tipo de restricción hace que la cartera de la institución financiera se vuelve más o menos arriesgada. Así el porcentaje de inversión en activos arriesgados en el caso restringido se puede escribir como,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \left(\frac{(\mu_1 - r)}{\gamma\sigma_1^2} - (1-k) \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} \right) + (1-k) = \frac{(\mu_1 - r)}{\gamma\sigma_1^2} + (1-k) \left(1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} \right) \quad (12)$$

Si K toma el valor óptimo del problema sin restricción esta proporción coincidiría lógicamente con la que se obtiene en el caso general.

Proposición 2

Cuando la restricción de cartera es vinculante, la inversión en activos con riesgo es mayor si y solo si la covarianza es positiva ($\rho > 0$) y la aportación al riesgo de la cartera del activo no elegible es mayor que la desviación típica del activo elegible ($\rho\sigma_2 > \sigma_1$).

El Coste del Colateral

Prueba Ver Anexo.

Por tanto, la institución financiera sometida a esta restricción tendría un comportamiento más arriesgado frente al caso sin restricción, si se cumple la condición anterior. En este caso la necesidad de colateralizar el crédito del banco central con activos elegibles (más seguros y líquidos) provoca un aumento global de la inversión en activos con riesgo. La intuición detrás de este resultado es la siguiente. Si la correlación es positiva ($\rho > 0$), una covarianza elevada hace que la sustituibilidad de los activos arriesgados aumente. Por tanto, una disminución en uno de ellos haría que la inversión en el otro aumentase. Si además, la aportación al riesgo de la cartera del activo no elegible es mayor que el riesgo del elegible ($\rho\sigma_2 > \sigma_1$), el aumento en la inversión de este es mayor que la disminución que provoca la restricción en las tenencias del activo no elegible.

Con las proporciones que se obtienen de la resolución del problema de maximización con restricciones se llega a la función indirecta de utilidad siguiente:

$$J(x,T) = \frac{1}{1-\gamma} g^{2}(T) x^{1-\gamma}$$

$$g^{2}(T) = \exp \left[(1-t)(1-\gamma) \left(\mu_2 - k(\mu_2 - r) - (1-k)(\mu_1 - r) \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} + \frac{1}{2\gamma} \frac{(\mu_1 - r)^2}{\sigma_1^2} - \frac{1}{2} \gamma (1-k)^2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} \right) \right] \quad (13)$$

Una vez obtenidas las funciones indirectas de utilidad en presencia de restricciones para ambas políticas de colateral podemos derivar la pérdida de bienestar que supone en cada caso la necesidad de disponer de activos de garantía.

4.3 Comparación

La pérdida de utilidad derivada se obtiene de la diferencia de utilidad entre el comportamiento óptimo y el caso con restricción. Es decir,

$$L = \frac{E[x^*(T)^{1-\gamma}] - E[\hat{x}(T)^{1-\gamma}]}{E[x^*(T)^{1-\gamma}]} = 1 - \frac{h(T)}{g^i(T)} \quad (14)$$

El Coste del Colateral

Donde x^* es el nivel de riqueza en el óptimo y \hat{x} es el valor de la riqueza en el caso con restricción y $g^i(T)$ se sustituye por la expresión (8) en el caso de un solo activo elegible ($i=1$) y la expresión (13) en el caso de dos activos ($i=2$). El parámetro T sería el plazo de la operación que cubre el colateral utilizado.

Con un activo elegible como colateral la función de pérdida vendría dada por la siguiente expresión,

$L = 1 -$

$$\exp \left[r(1-\gamma) \left((\mu_2 - r)(k-1) + \frac{1}{2\gamma} \frac{(\mu_1 - r)^2 \sigma_2^2 + (\mu_2 - r)^2 \sigma_1^2 - 2(\mu_2 - r)(\mu_1 - r)\sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} - \frac{1}{2\gamma} \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2} - a(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}, \gamma, k) \right) \right]$$

(15)

Proposición 3a

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera aumenta cuando,

- (i) aumenta el plazo de la operación de crédito
- (ii) disminuya el coeficiente de aversión relativa al riesgo
- (iii) aumenta la rentabilidad esperada del activo arriesgado AR1
- (iv) disminuya la rentabilidad esperada del activo sin riesgo
- (v) aumente la rentabilidad esperada del activo arriesgado AR2 si se cumple la condición: $\sigma_1 > \rho \sigma_2$, o disminuye en caso contrario.

Prueba. Ver anexo.

En primer lugar, cuanto mayor sea el plazo de la operación que se asegura con colateral, mayor es el espacio de tiempo en el que debemos mantener una cartera subóptima y por tanto, mayor es la pérdida. En segundo lugar, un aumento en la aversión relativa al riesgo hace que la inversión en activos con riesgo disminuya, aumentando la inversión en el activo libre de riesgo, por tanto la desviación con respecto al óptimo sería menor (la diferencia entre α_0^* y k se reduce). En tercer lugar, aumentos en la prima de riesgo del activo menos arriesgado aumentan la pérdida ya que se produce un aumento de su atractivo frente al activo sin riesgo. Por último, la evolución de la función de pérdida con respecto a la prima de riesgo del activo más arriesgado depende de la correlación entre ambos activos

El Coste del Colateral

arriesgados. Con correlación positiva, los activos arriesgados tendrían cierto grado de sustituibilidad y el aumento de la prima de riesgo del activo más arriesgado aumenta su proporción en la cartera óptima mientras que la del activo no elegible depende de la condición establecida. Si esta se cumple, la inversión total en activos con riesgo aumenta y por tanto también lo hace la pérdida, en caso contrario la inversión en el activo arriesgado con menor varianza (AR1) disminuye en una mayor cuantía que el aumento que se produce en el otro activo arriesgado (AR2), entonces la pérdida es menor. Cuando la correlación es negativa, el aumento en la proporción de la inversión en AR1 supone también un aumento de la proporción óptima en AR2 para obtener los beneficios derivados de la diversificación del riesgo por lo que la pérdida es mayor al aumentar la diferencia entre α_0^* y k .

Proposición 3b

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera disminuye con aumentos en la varianza del activo más arriesgado si la correlación es negativa ($\rho < 0$), o si es positiva ($\rho > 0$) y se cumple la siguiente condición: $\frac{(\mu_1 - r)}{(\mu_2 - r)} < \frac{2\sigma_1}{\rho\sigma_2} - 1$. En caso contrario la pérdida es creciente.

Prueba. Ver anexo.

Un aumento de la varianza del activo más arriesgado disminuye la inversión en este y en los activos con riesgo en conjunto siempre que la correlación es negativa, o siendo positiva, se cumple la condición establecida en la proposición. Anteriormente se ha comentado que la correlación negativa suponía que un descenso en la inversión en uno de los activos con riesgo llevaría consigo también un descenso en el otro para equilibrar el beneficio obtenido por la diversificación. Luego, si con correlación negativa la inversión en el activo más arriesgado disminuye también disminuye reduciendo la distancia entre α_0^* y k . Si la correlación es positiva y se cumple la condición anterior, la inversión óptima en el activo más arriesgado disminuye con su varianza por encima del aumento en el otro activo arriesgado. Por tanto, se produciría un disminución de la inversión en activos con riesgo y una disminución de la pérdida. Cuando la condición no se cumpla, la inversión conjunta en activos con riesgo aumenta, bien porque la disminución de la inversión del activo más

El Coste del Colateral

arriesgado no es suficiente para contrarrestar el aumento en la del otro activo con riesgo o bien porque la inversión en ambos disminuye.

Proposición 3c

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera disminuye con aumentos en la varianza del activo menos arriesgado si la correlación es negativa ($\rho < 0$), o si es positiva (ρ

> 0) y se cumple la siguiente condición: $\frac{(\mu_2 - r)}{(\mu_1 - r)} < \frac{2\sigma_2}{\rho\sigma_1} - 1$. En caso contrario la pérdida es

creciente.

Prueba. Ver anexo.

La intuición sigue el mismo razonamiento que se ha expuesto en la proposición anterior, ahora para el caso de la varianza del activo menos arriesgado.

Proposición 3d

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera disminuye con aumentos en la covarianza entre los dos activos con riesgo si es negativa o si es positiva y se cumple la

condición: $\frac{(\mu_1 - r)}{(\mu_2 - r)} > \frac{\sigma_{12}\rho + \sigma_1\sigma_2 - \rho 2\sigma_1^2}{-\sigma_{12}\rho - \sigma_1\sigma_2 + \rho 2\sigma_2^2}$. En caso contrario la pérdida es creciente.

Prueba. Ver anexo

Si la correlación entre los dos activos con riesgo es negativa un aumento de la covarianza supone un menor beneficio procedente de la diversificación. Por tanto se produce una disminución en la proporción de inversión en los dos activos y una disminución de la pérdida. Si por el contrario, la covarianza es positiva entra en juego la condición que se ha establecido.

Para el caso de dos activos elegibles se analiza que efectos tienen los cambios en los diferentes parámetros en el montante de esa disminución de utilidad.

Proposición 3a

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera aumenta cuando,

El Coste del Colateral

- (vi) aumenta el plazo de la operación de crédito
- (vii) disminuya el coeficiente de aversión relativa al riesgo
- (viii) aumenta la prima de riesgo del activo no elegible
- (ix) disminuya la prima de riesgo del activo elegible con correlación positiva ($\rho > 0$) y aumenta cuando esta es negativa ($\rho < 0$).

Prueba. Ver anexo.

Los resultados de la proposición 3a son bastante intuitivos. En primer lugar, como ocurría para el caso de dos activos, cuanto mayor es el plazo de la operación que se asegura con colateral, mayor es el espacio de tiempo en el que debemos mantener una cartera subóptima y por tanto, mayor es la pérdida. En segundo lugar, un aumento en la aversión relativa al riesgo hace que la inversión en activos con riesgo disminuya, aumentando la inversión en el activo libre de riesgo. En este caso la inversión óptima en activos elegibles aumenta porque la inversión en el activo sin riesgo crece por encima del descenso que se produce en el activo elegible con riesgo. Por tanto la desviación con respecto al óptimo es menor (la diferencia entre $(\alpha_1^* + \alpha_0^*)$ y k se reduce). Por último, la evolución de la función de pérdida con respecto a la prima de riesgo del activo elegible depende de la correlación entre ambos activos arriesgados. Con correlación positiva, los activos arriesgados tendrían cierto grado de sustituibilidad y el aumento de la prima de riesgo del activo elegible aumenta su proporción en la cartera óptima mientras que la del activo no elegible disminuye. Cuando la correlación es negativa, el aumento en la proporción de la inversión en el activo elegible con riesgo supone también un aumento de la proporción óptima del activo no elegible por lo que la pérdida es mayor al aumentar la diferencia entre $(\alpha_1^* + \alpha_0^*)$ y k .

Proposición 3b

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera disminuye con aumentos en la rentabilidad del activo sin riesgo si la correlación es negativa ($\rho < 0$), o si es positiva ($\rho > 0$) y la desviación típica del activo elegible con riesgo es mayor que la aportación al riesgo de la cartera del activo no elegible ($\rho\sigma_2 < \sigma_1$). En caso contrario la pérdida es creciente con el rendimiento del activo sin riesgo.

Prueba. Ver anexo.

El Coste del Colateral

Un aumento en la rentabilidad del activo libre de riesgo supone un aumento de su atractivo como inversión y por tanto una mayor proporción invertida en dicho activo. Este incremento supone una disminución de la proporción del activo no elegible en la cartera siempre que la correlación es negativa. Una correlación negativa supone que un descenso en la inversión en uno de los activos con riesgo lleva consigo también un descenso en el otro para equilibrar el beneficio obtenido por la diversificación. Cuando la covarianza es positiva, existe cierto grado de sustituibilidad entre los activos con riesgo. Un aumento en la inversión del activo sin riesgo supone un aumento en la del activo no elegible solo si su contribución al riesgo de la cartera es mayor que la desviación típica del activo elegible. Al aumentar la inversión en el activo seguro, el comportamiento óptimo pasa por aumentar la inversión en el activo con mayor varianza y así compensar el descenso en el riesgo global. Por tanto, la proporción de activos elegibles se acerca a la restricción siendo la pérdida menor (la distancia entre $(\alpha_1^* + \alpha_0^*)$ y k disminuye).

Proposición 3c

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera disminuye con aumentos en la varianza del activo no elegible si la correlación es negativa ($\rho < 0$), o si es positiva ($\rho > 0$) y

se cumple la siguiente condición:
$$\frac{(\mu_2 - r)}{\frac{\sigma_2}{(\mu_1 - r)}} > \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_1}$$
. En caso contrario la pérdida es creciente.

Prueba. Ver anexo.

Un aumento de la varianza del activo no elegible disminuye la inversión en este activo siempre que la correlación es negativa, o siendo positiva, se cumpla la condición establecida en la proposición. Anteriormente se ha comentado que la correlación negativa suponía que un descenso en la inversión en uno de los activos con riesgo llevaría consigo también un descenso en el otro para equilibrar el beneficio obtenido por la diversificación. Luego, si con correlación negativa la inversión en el activo elegible con riesgo aumenta ante cambios en la varianza del activo no elegible, la inversión en este último también disminuye reduciendo la distancia entre $(\alpha_1^* + \alpha_0^*)$ y k . Si la correlación es positiva y se

El Coste del Colateral

cumple la condición anterior, la inversión óptima en el activo con riesgo no elegible disminuye con su varianza. Por tanto, se produce un aumento de su presencia en la cartera óptima. Cuando la condición no se cumpla, la inversión en el activo con riesgo no elegible es negativa. Entonces, un aumento de su varianza hace aumentar su porcentaje de inversión. Por tanto, el porcentaje invertido en activos elegibles disminuye aumentando la pérdida inducida por la restricción.

Proposición 3d

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera disminuye con aumentos en la varianza del activo elegible si la correlación es negativa ($\rho < 0$), aumentando en el caso contrario ($\rho > 0$).

Prueba. Ver anexo.

La intuición para el caso de correlación negativa sigue el mismo razonamiento que se ha expuesto para las proposiciones anteriores. Cuando la correlación es positiva un aumento de la varianza del activo elegible mejora la posición relativa del activo no elegible. Al aumentar su porcentaje de inversión en la cartera óptima aumenta la diferencia entre $(\alpha_1^* + \alpha_0^*)$ y k y por tanto la pérdida en la que se incurriese.

Proposición 3e

La pérdida de utilidad debido a la restricción de cartera disminuye con aumentos en la covarianza entre los dos activos con riesgo si esta es negativa o si es positiva y se cumple la

condición: $\frac{(\mu_1 - r)}{(\mu_2 - r)} > \frac{2\sigma_1\rho}{\sigma_2(1 + \rho^2)}$. En caso contrario la pérdida es creciente.

Prueba. Ver anexo

Si la correlación entre los dos activos con riesgo es negativa un aumento de la covarianza supone un menor beneficio procedente de la diversificación. Por tanto se produce una disminución en la proporción de inversión en los dos activos y una disminución de la pérdida. Si por el contrario, la covarianza es positiva entra en juego la condición que se ha establecido. Esta condición relaciona las primas de riesgo con la

El Coste del Colateral

desviación típica de cada activo y la correlación entre ambos. Si la prima de riesgo no es lo suficientemente grande, el activo no elegible pierde atractivo y ve reducida su participación en la cartera óptima. Esto hace que la pérdida disminuya al acercarnos a la restricción.

4.4 Calibración del Coste del Colateral

Resulta interesante cuantificar en términos monetarios la pérdida de utilidad provocada por la restricción sobre el nivel de activos elegibles. Este ejercicio se puede realizar calculando en cuanto se debería reducir la rentabilidad esperada de los activos para obtener, si no existieran restricciones, el mismo nivel de utilidad que en el caso restringido. Este coste tiene dos componentes: en primer lugar, el derivado de invertir una proporción más elevada en los activos elegibles, en segundo lugar, el asociado a la imposibilidad de mantener las proporciones deseadas de cada activo cuando cambian los precios, como consecuencia de la necesidad de mantener un determinado volumen de activos elegibles. El primer coste puede ser calibrado a partir de las funciones indirectas de utilidad derivadas en las secciones 4.1 y 4.2. Para el segundo hacer falta realizar una simulación a partir de las carteras elegidas en el caso no restringido y el restringido y los procesos estocásticos seguidos por los rendimientos de los activos, comparando la utilidad media obtenida en ambas circunstancias.

Los valores supuestos de los diferentes parámetros son los siguientes: $\gamma = 4$, Alonso, Rubio y Tusell (1988) estiman una prima de riesgo para el mercado español en torno a 4. El rendimiento del activo que representa la deuda pública se sitúa en el 4% anual mientras que el rendimiento esperado del activo arriesgado con menor varianza se toma igual a 7%. El rendimiento del activo con mayor riesgo está en el 10% anual. Los valores para las varianzas de ambos activos tratan de generar una cartera óptima de proporciones razonables⁴. El parámetro T es el plazo de la operación que se toma igual 15 días de acuerdo con el vencimiento de las operaciones realizadas por el Eurosistema.

Los cálculos se efectúan suponiendo que la restricción de cartera que implica la disponibilidad de activos de garantía genera una desviación sobre los pesos de la cartera óptima de un punto porcentual, 5 puntos y 10. A partir de la función de pérdida se obtendría

⁴ Las proporciones de la cartera óptima son: 0.26 para ALR, 0.25 para AR1 y 0.49 para AR2.

El Coste del Colateral

la reducción de rentabilidad para cada uno de los activos que equivaldría al descenso de utilidad provocada por la restricción.

Un activo elegible

En el cuadro 1 se presentan los resultados para cada uno de los valores de la desviación y para los dos costes identificados en términos de rentabilidad anualizada en puntos básicos. Con el objeto de comparar las políticas de elegibilidad de los activos de garantía se establecen unas necesidades de liquidez iguales a la suma de las proporciones de inversión óptimas del activo sin riesgo y de AR1. El coste 1 corresponde al mantenimiento de unas proporciones de cartera subóptimas mientras que el coste 2 refleja además el efecto de los cambios en los precios relativos durante la vida de la operación.

Cuadro 1
1 activo elegible

Desviación	Coste 1	Coste 2
0%	0	0,38
1%	17,25	17,62
5%	22,94	23,29
10%	31,21	31,53

Como se puede apreciar la pérdida de utilidad en términos de rentabilidad anual se sitúa entre 17 y 31 puntos básicos. El coste adicional debido a la evolución de la riqueza añade poco más de un tercio de punto básico por lo que se puede considerar despreciable. Si se toma como referencia un valor para la restricción de un 5% sobre el óptimo, la pérdida de rentabilidad se sitúa en torno a los 23 puntos básicos incluyendo ambos costes.

Dos activos elegibles

En el cuadro 2 se presentan los resultados para cada uno de los valores de la desviación y para los dos costes como rentabilidad anualizada (puntos básicos) cuando dos tipos de activos son elegibles como garantía. De nuevo se distingue entre el coste 1 y 2.

Cuadro 2
2 activos elegibles

Desviación	Coste 1	Coste 2
0%	0	0,34
1%	0,04	0,37

El Coste del Colateral

5%	1,11	1,40
10%	4,44	4,67

Como se puede apreciar la pérdida de utilidad en términos de rentabilidad anual se sitúa entre 0.046 y 4.4 puntos básicos para el coste 1 y entre 0.337 y 4.67 para el coste 2. El coste provocado por un aumento en la restricción debido a la evolución del precio de los activos se sitúa de nuevo en torno a un tercio de punto básico. De este modo, para los parámetros establecidos, el coste cuando se pueden utilizar dos tipos de activos elegibles como garantía es mucho menor que el obtenido cuando solo existe un activo elegible para el mismo nivel de restricción. Así, por ejemplo, para una desviación de la cartera del 5%, la elegibilidad de dos en lugar de un solo activo de garantía supone una pérdida de utilidad equivalente a una disminución de rentabilidad de la cartera de más de 20 puntos básicos. Por tanto, la flexibilidad en la política de elegibilidad de los activos utilizables en las operaciones de política monetaria de los bancos centrales, como es el caso del Eurosistema, puede reducir de manera importante el coste que genera las entidades la necesidad de disponer de colateral para obtener crédito del banco central..

5. Sistemas de Movilización del Colateral

Hasta ahora se ha supuesto que la composición de los activos depositados era siempre óptima dado el nivel de restricción. En la actualidad, dentro del modelo del Eurosistema, existen dos posibilidades para la movilización de los activos de garantía en este tipo de operaciones. El sistema de cesta o “pool” que permite ajustar la composición de los activos depositados diariamente y el sistema individualizado en el que cada activo está identificado con la operación correspondiente y se mantiene hasta el vencimiento de la misma. Así, en este apartado se estima el coste adicional que puede generar la imposibilidad de modificar la composición de los activos movilizados durante la vida de la operación. Para ello se analiza el caso en que la evolución de la riqueza de la entidad puede hacer que en algún momento sea óptimo modificar la composición de los activos depositados y se calcula el coste diferencial de no poder realizar esa modificación. En el cuadro 4 aparece el coste 3 que incluye el coste de invertir en una cartera subóptima (coste 1), el provocado por la evolución de la riqueza (coste 2), así como el que proviene del uso

El Coste del Colateral

de un sistema individualizado de depósito frente a uno de cesta. A continuación se presentan los resultados.

Cuadro 4
2 activos elegibles

Desviación	Coste 1	Coste 2	Coste 3
0%	0	0,34	0,06
1%	0,04	0,37	0,44
5%	1,11	1,40	1,46
10%	4,44	4,67	4,75

El coste total incluyendo la restricción de no poder reajustar la cartera de activos elegibles se encuentra entre 0.063 y 4.74 puntos básicos en función del porcentaje de desviación. Para el nivel del 5% la pérdida se sitúa cerca de 5 puntos básicos. El coste que impone el sistema individual sobre el de cesta no es muy relevante ya que en este caso la política óptima de inversión se mantiene constante durante el plazo de la operación. Resulta interesante repetir la simulación introduciendo algún cambio no anticipado en alguno de los parámetros que caracterizan la distribución de los rendimientos que cambie el atractivo relativo de ambos activos. Así, se supone que a partir del séptimo día del plazo del préstamo se produce una disminución razonable de la varianza del activo elegible con riesgo y se vuelve a estimar este coste. Esta se supone igual a la variación media de las volatilidades implícitas del IBEX35. A continuación se presentan los resultados.

Cuadro 5

Desviación	Coste 1	Coste 2	Coste 3
0%	0	0,33	5,95
1%	0,04	0,36	6,41
5%	1,07	1,34	7,77
10%	4,28	4,50	11,36

En este caso el coste total de la restricción por el uso de activos de garantía se sitúa entre 6.4 y 11.36 puntos básicos. Para el caso de la restricción del 5% la pérdida se encuentra en torno a los 8 puntos básicos frente a los 1.5 que se registraba en el sistema de cesta. Por tanto el coste se ha multiplicado por más de cinco en el sistema individualizado al introducir un cambio en uno de los parámetros, al que no puede responder la entidad por tener inmovilizada la parte de la cartera utilizada como colateral. Este resultado ilustra la

El Coste del Colateral

desventaja a que hacen frente las entidades que por su localización no tienen acceso al sistema de cesta –o este se encuentra administrativamente penalizado- frente a otras que operan en países donde este es el procedimiento utilizado.

6. Conclusión

En este trabajo se analiza y estima el coste de disponibilidad de colateral en las operaciones de suministro de liquidez por parte de los bancos centrales. Este análisis se lleva a cabo mediante la comparación del comportamiento inversor de una entidad financiera que puede invertir siempre de manera libre frente a otra que se ve influida por las restricciones que supone la política de garantías del banco central. Esto permite caracterizar la política de inversión restringida en función de las necesidades de liquidez de las entidades.

Los resultados de esta estimación indican, en primer lugar, que la flexibilidad de los criterios de elegibilidad de los activos utilizables en las operaciones de política monetaria de los bancos centrales puede reducir de modo significativo el coste del requerimiento de activos de garantía en estas operaciones. Así, de acuerdo con una simulación efectuada, el coste diferencial en términos de pérdida de utilidad, entre un modelo como el de la Reserva Federal, donde solo un tipo de activo es elegible, y otro como el del Eurosistema, donde existe una mayor variedad de activos elegibles, puede alcanzar niveles elevados. Para necesidades de liquidez que suponen un 5% de desviación respecto a la cartera óptima puede equivaler a una disminución de rentabilidad de la inversión de unos 20 puntos básicos, para operaciones de crédito a 15 días. En segundo lugar el coste provocado por el cambio en los precios de los activos y el que se deduce del uso de un sistema individual frente a un sistema de cesta en la movilización de los activos resulta poco relevante si no se produce cambio alguno en la política óptima de inversión. Sin embargo, si se introduce un cambio razonable, no anticipado, en alguno de los parámetros de la distribución de rendimientos que modifique el comportamiento inversor deseado por la entidad el coste diferencial entre los dos modos de movilización de colateral adquiere relevancia. El ejercicio de calibración realizado indica que ante cambios modestos en el riesgo relativo de los instrumentos elegibles la posibilidad que ofrece el sistema de cesta de modificar la

El Coste del Colateral

composición de los activos de garantía implica ganancias de utilidad relativamente importantes con respecto al sistema individualizado.

Estos resultados apoyan la adopción de políticas de colateral que restrinjan en la menor medida posible las decisiones de cartera de las entidades siempre que esto sea, lógicamente, compatible con la adecuada cobertura de los riesgos contraídos por los bancos centrales en sus operaciones de crédito. Al mismo tiempo, sugiere la relevancia de buscar, dentro del Eurosistema, sistemas homogéneos de depósito del colateral con objeto de evitar distorsiones competitivas que, según el análisis efectuado, pudieran ser relevantes.

Anexo 1

Proposición 1

Se pretende obtener los valores para los cuales una aumento en las necesidades de activos colaterales supone un aumento de la inversión en activos arriesgados, es decir cuando $\frac{\partial(\alpha'_1 + \alpha'_2)}{\partial k} > 0$. Derivando con respecto a k en la suma de proporciones de activos

arriesgados bajo la restricción se obtiene: $\frac{\partial(\alpha'_1 + \alpha'_2)}{\partial k} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} - 1$. Esta expresión será mayor

que cero cuando $\rho\sigma_2 > \sigma_1$.

Proposición 2a

Punto (i),

$$\text{Sea } \left(r + \frac{1}{2\gamma} \frac{(\mu_1 - r)^2 \sigma_2^2 + (\mu_2 - r)^2 \sigma_1^2 - 2(\mu_2 - r)(\mu_1 - r)\sigma_{12}}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \right) = O \text{ y}$$

$$\left(kr + (1-k)\mu_2 + \frac{1}{2\gamma} \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2} - \frac{1}{2}(1-k)^2 \gamma \sigma_2^2 + \frac{(\sigma_{12}^2 - \sigma_2^2)(1-k)(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2} + \frac{1}{2} \frac{\gamma(\sigma_{12}^2 - \sigma_2^2)^2 (1-k)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}^2} \right) = SO$$

Entonces la función de pérdida se puede escribir como,

$$1 - \exp[T(1-\gamma)(SO - O)]$$

Caso (a) si $\gamma < 1$ $L > 0$ entonces hay que demostrar que $\frac{\partial L}{\partial T} \geq 0$

Caso (b) si $\gamma > 1$ $L < 0$, luego hay que demostrar que $\frac{\partial L}{\partial T} \leq 0$

Caso (a).

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\exp[T(1-\gamma)(SO - O)](1-\gamma)(SO - O) > 0 \text{ porque } SO < O \text{ y } \gamma < 1$$

Caso (b).

El Coste del Colateral

$$\frac{\partial L}{\partial T} = -\exp[T(1-\gamma)(SO-O)](1-\gamma)(SO-O) > 0, \text{ porque } SO < O \text{ y } \gamma > 1$$

Punto (ii)

Se debe probar que $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \gamma} < 0$.

Así, $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \gamma} = \frac{(\mu_2 - r)(\sigma_2^2 - \sigma_{12}) + (\mu_1 - r)(\sigma_1^2 - \sigma_{12}) - 1}{(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \frac{-1}{\gamma^2} < 0$ ya que $(\alpha_1^* + \alpha_2^*)$ y la aversión al riesgo son mayores que cero⁵.

Punto (iii)

Se debe probar que $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \mu_1} > 0$.

Así, $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \mu_1} = \sigma_2 - \rho \sigma_1 > 0$ ya que la varianza de AR1 es menor que la de AR2.

Punto (iv)

Se debe probar que $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial r} < 0$.

Así, $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial r} = -\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + 2\sigma_{12} = -\text{var}(S1+S2) < 0$.

Punto (v)

Se debe probar que $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \mu_2} > 0$ si $\sigma_1 > \rho \sigma_2$.

Así, $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \mu_2} = \sigma_1 - \rho \sigma_2 > 0$ si se cumple la condición o lo contrario si no se cumple.

Proposición 2b

Derivando en la proporción óptima de activos no elegibles se obtiene:

$$\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \sigma_1^2} = (1 - \rho^2) \sigma_1^3 \sigma_2 [(\mu_1 - r) \sigma_2 \rho + (\mu_2 - r)(2\sigma_1 - \sigma_2 \rho)].$$

Si la correlación es negativa, la derivada es siempre negativa. Cuando la correlación es positiva, la derivada

será negativa $\frac{(\mu_1 - r)}{(\mu_2 - r)} < \frac{2\sigma_1}{\rho \sigma_2} - 1$ y positiva en caso contrario.

Proposición 2c

Derivando en la proporción óptima de activos no elegibles se obtiene:

$$\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial \sigma_1^2} = (1 - \rho^2) \sigma_2^3 \sigma_1 [(\mu_2 - r) \sigma_1 \rho + (\mu_1 - r)(\sigma_1 \rho - 2\sigma_2)].$$

Si la correlación es negativa, la derivada es siempre negativa. Cuando la correlación es positiva, la derivada será negativa

$\frac{(\mu_2 - r)}{(\mu_1 - r)} < \frac{2\sigma_2}{\rho \sigma_1} - 1$ y positiva en caso contrario.

⁵ La restricción solo puede ser efectiva cuando la inversión en el activo no elegible es positiva.

El Coste del Colateral

Proposición 2d

Derivando la proporción de activos elegibles con respecto a la covarianza entre los dos activos arriesgados se obtiene:

$$\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_2^*)}{\partial\sigma_{12}} = \sigma_2\sigma_1[(\mu_1 - r)(2\sigma_2^2\rho - \sigma_2\sigma_1 - \sigma_{12}\rho) + (\mu_2 - r)(2\sigma_1^2\rho - \sigma_2^2\rho^2 - \sigma_2)]$$

Esta expresión es negativa si la correlación es negativa o se cumple la condición

$$\frac{(\mu_1 - r)}{(\mu_2 - r)} > \frac{\sigma_{12}\rho + \sigma_1\sigma_2 - \rho 2\sigma_1^2}{-\sigma_{12}\rho - \sigma_1\sigma_2 + \rho 2\sigma_2^2},$$

en caso contrario es positiva.

Proposición 3a

Punto (i)

El razonamiento es el mismo que en el punto (i) de la proposición 2ª.

Punto (ii)

Se debe probar que $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial\gamma} > 0$. Así, $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial\gamma} = \frac{(\mu_2 - r)\sigma_1^2 - (\mu_1 - r)\sigma_{12}}{(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} \frac{1}{\gamma^2} > 0$ ya

que α_2^* y la aversión al riesgo son mayores que cero⁶.

Punto (iii),

Se debe probar que $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial(\mu_2 - r)} < 0$. Así, $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial(\mu_2 - r)} = -\frac{\sigma_1^2}{\gamma(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)} < 0$ ya que la

aversión relativa al riesgo es positiva.

Punto (iv)

Se debe probar que el signo de $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial(\mu_1 - r)}$ depende de la correlación entre las

rentabilidades de los activos arriesgados. Así, $\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial(\mu_1 - r)} = \frac{\sigma_{12}}{\gamma(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}$. Si la

correlación es positiva esta expresión será positiva y la pérdida será menor, si por el contrario es negativa la expresión será negativa y la pérdida crecerá.

Proposición 3b

Derivando en la proporción óptima de activos elegibles se obtiene:

$$\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial r} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}}{\gamma(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}.$$

Si la correlación es negativa σ_{12} es negativa y la derivada es siempre positiva. Cuando la correlación es positiva, la derivada será positiva cuando $\sigma_1 > \rho\sigma_2$ y negativa en caso contrario.

Proposición 3c

⁶ La restricción solo puede ser efectiva cuando la inversión en el activo no elegible es positiva.

El Coste del Colateral

Derivando la proporción de activos elegibles con respecto a la desviación típica del activo no elegible se obtiene:
$$\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial\sigma_2} = \frac{(\rho^2 - 1)\sigma_1^2\sigma_2((\mu_1 - r)\sigma_{12} - 2(\mu_2 - r)\sigma_1^2)}{\gamma(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2}$$
. Con correlación negativa $((\mu_1 - r)\sigma_{12} - 2(\mu_2 - r)\sigma_1^2)$ es menor que cero y la derivada es positiva. Con correlación positiva y $((\mu_1 - r)\sigma_{12} - 2(\mu_2 - r)\sigma_1^2) < 0$ obtenemos la misma conclusión. Si $((\mu_1 - r)\sigma_{12} - 2(\mu_2 - r)\sigma_1^2) > 0$ la derivada es negativa.

Proposición 3d

Derivando la proporción de activos elegibles con respecto a la desviación típica del activo elegible se obtiene:
$$\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial\sigma_1} = -\frac{(\mu_1 - r)\rho\sigma_2(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)}{\gamma(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2}$$
 cuyo signo depende del signo del coeficiente de correlación. Con correlación negativa la derivada es positiva, cuando esta es positiva la derivada es negativa.

Proposición 3e

Derivando la proporción de activos elegibles con respecto a la covarianza de los dos activos arriesgados se obtiene:
$$\frac{\partial(\alpha_1^* + \alpha_0^*)}{\partial\sigma_{12}} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2((\mu_1 - r)\sigma_2(1 + \rho^2) - (\mu_2 - r)2\sigma_1\rho)}{\gamma(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2)^2}$$
 cuyo signo depende del signo de la expresión $((\mu_1 - r)\sigma_2(1 + \rho^2) - (\mu_2 - r)2\sigma_1\rho)$. Si $((\mu_1 - r)\sigma_2(1 + \rho^2) - (\mu_2 - r)2\sigma_1\rho) > 0$ la derivada será positiva si ocurre el caso contrario será negativa.

Bibliografía

-Alonso, A., Rubio, G. y Tusell F. 1988. Estimación del coeficiente de aversión relativa al riesgo: propiedades asintóticas de un estimador generalizado de momentos. *Revista Española de Economía*, 2a. época, v. 5, nos. 1-2, 1988 ; pp.105-118.

-Banco Central Europeo. 2002. La política monetaria única en la tercera etapa, Documentación general sobre instrumentos y procedimientos de política monetaria del Eurosistema.

-Board of Governors of the Federal Reserve System. 1994. The Federal Reserve System: Purposes and Functions. Washington.

-Folkerts-Landau, D., Garber P. y Schoenmaker, D. 1996. The reform of wholesale payment systems and its impact on financial markets. Occasional paper nº 51. *Group of Thirty*. Washington D.C.

El Coste del Colateral

- Gouriéroux, C. and Jouneau, F. 1999. Econometrics of efficient fitted portfolios. *Journal of Empirical Finance*. Vol. 6, 87-118.
- Humphrey, D.B. 1995. Payment systems: Principles, practice, and improvements. *Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento. World Bank Technical Papers*; 260.
- Markowitz, H. 1952. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 7, 77-91.
- Merton, R.C.. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: the Continuous time case. *Review of Economics and Statistics*, 51: 247-257.
- Rochet, J.C. y Tirole, J. 1996(a). Controlling risks in payment systems. *Journal of Money, Credit, and Banking*. Vol-28, n° 4, Part 2.
- Rossi, M. 1998. Payment systems in the Financial Markets: real-time gross settlement systems and the provision of intraday liquidity. London, Macmillan.
- Sentana, E. 2001. Mean-Variance portfolio allocation with a Value at Risk constraint. Working Paper num. 0105. *CEMFI*.