Doctorado en Finanzas Cuantitativas

Universidad de Valencia

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

”Valoración de warrants”

Alberto Morillo

Universidad del País Vasco

Tutor: Gonzalo RUBIO

Universidad del País Vasco

Bilbao, *1 de julio de 2003*

abstract

La literatura más relevante referente a la valoración de warrants ha desarrollado una serie de modelos que muestran resultados dispares entre mercados. En este trabajo se analiza la valoración de warrants en el mercado español, y se compara el resultado con los obtenidos en otros mercados. Los resultados muestran que el mercado sobrevalora el precio de mercado de los warrants.

1. Introducción a los warrants

En los últimos años, los warrants han sido el producto estrella en los grandes mercados internacionales de valores. Sus peculiaridades los hacen un producto indicado tanto para el inversor a corto plazo como para el gestor que desea cobertura para su cartera, y en particular para la puesta en warrants de los fondos garantizados. Para el caso español su crecimiento ha sido espectacular en los dos últimos años, y todo parece indicar que seguirá creciendo.

1.1. ¿Qué es un warrant?

En un principio los warrants surgen como derechos de conversión en acciones asociados a emisiones de renta fija. Posteriormente esos derechos de conversión se independizan de los activos de renta fija para quedar como opciones a medio y largo plazo.

Un warrant es una **opción titulizada**, es decir, es un título negociable cotizado, que da el derecho, pero no la obligación, a comprar (vender), en el caso de warrants call (warrants put), un activo subyacente determinado, en unas condiciones pre-establecidas, mediante el pago de una prima.

Los warrants son productos financieros complejos, de ahí que el problema a la hora de definir qué es un warrant se acreciente ante la cantidad de modalidades de valores negociables que llevan esa denominación. De los diferentes tipos de warrants destacamos los dos siguientes[1]:

[1] Destacamos este tipo de warrants porque son los que tienen mayor trato y discusión en la literatura.

1. **Warrants de adquisición (call) de acciones**: la sociedad cumple con su obligación de entrega del valor mediante una ampliación de capital, a través de una emisión de obligaciones o a través de una autocartera -si la entidad tiene acciones, entregándolas en lugar de emitir nuevas acciones-. En caso de que los warrants sean de otra sociedad diferente a la emisora, se exige a dicha sociedad emisora de warrants que en el folleto informativo haga constar las garantías de inmovilización de los valores a entregar al titular del warrant.

2. **Warrants de venta (put) de acciones**: Son los warrants que incorporan un derecho de opción de venta de un valor principal a un precio determinado o determinable. El emisor de los warrants se compromete a comprar los valores al precio establecido y el tenedor de tales valores adquiere el derecho a venderlos.

Tal y como se ha visto un warrant es un activo financiero que cotiza en bolsa, y el procedimiento de negociación es muy similar al de las acciones. Los warrants están listados en la Bolsa de Valores de Madrid, y son tan fáciles de adquirir como las acciones; basta con que el inversor comunique la orden de compra o venta a su intermediario financiero.

1.2. La dilución

En principio, los warrants surgen como medio de financiación de las sociedades, acompañando a emisiones de renta fija privada. La consecuencia de haber emitido warrants era que el número de acciones de la sociedad se incrementaba en caso de que en el vencimiento el warrant estuviese dentro de dinero.

Uno de los temas centrales en la valoración de warrants es la forma de introducir esa emisión de acciones para "payoffs" positivos, que es lo que se denomina *efecto dilución*.

Sin embargo, en el mercado español los warrants no acompañan a una necesidad de financiación. Esto significa que la emisión de un warrant, desde hace tiempo divorciada de la emisión conjunta de un bono privado, no implica una emisión de acciones en su vencimiento, esté o no dentro de dinero.

A pesar de su escasa relevancia en la valoración actual de warrants, por su papel específico en la evolución de la valoración de warrants en el mercado español, citamos la que se considera *forma apropiada de corregir el efecto dilución*, que sería aplicable cuando a lo largo de la vida del warrant haya una ampliación de capital.

Partimos de un modelo de valoración para opciones, que se considere apropiado para la valoración de warrants[2], pero dado que se considera la dilución, se le deben aplicar las siguientes correcciones:

1. El precio de la acción se sustituye por el de los activos de la sociedad.
2. La volatilidad del rendimiento se cambia por la volatilidad de los activos de la sociedad.
3. La fórmula entera se multiplica por el factor de dilución.

Aplicando dichos condicionantes, la expresión para valoración de warrants que corrige el efecto de dilución de forma correcta es la siguiente:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{1+q} C_w(S, N, \sigma_s, r, T) \tag{1}$$

donde:
$\mathcal{W}$ = el valor del warrant.
S = el valor del subyacente.
σ_s = volatilidad del subyacente.
q = el coeficiente de dilución = n/N
N = el número de acciones ya existentes.
n = el número de acciones emitidas por la emisión del warrant.
r = el tipo de interés
T = el vencimiento de la opción y del warrant
C_w= el valor de la opción de compra, de un modelo que tiene en
= cuenta las condiciones 2 y 3 para corregir dilución.

Habiendo descrito la problemática sobre cómo considerar el efecto dilución en la valoración de warrants, es destacable el trabajo de *Schulz & Trautman(89, 94)* donde se indica que incluso suponiendo un valor extremo para dilución, la desviación resultante de usar el modelo de "Black-Scholes tal cual", respecto al *modelo correcto*, es muy pequeña. Por lo tanto, consideran que para obtener valores precisos de los precios de warrants, no se necesitan ajustes por dilución en la fórmula de Black-Scholes, excepto quizás para warrants muy fuera de dinero o warrants fuera de dinero próximos a su vencimiento.

[2] A lo largo del trabajo se utiliza el modelo de valoración de Black-Scholes.

Cuadro 1: **Algunos estudios sobre valoración de warrants y el efecto dilución.**

Modelo corregido	**Modelo no-corregido**	**Corrección parcial**
Kuwahara-Marsh (92)	Trautman (86)	Ferri-Kremer-Oberhelman (86)
Lauterbach-Schultz (90)	Schultz-Trautman (89)	Kremer-Roenfeld (93)
Hauser-Lauterbach (97)	Stucki-Wasserfallen (91)	Noreen-Wolson (81)
Shastri-Sirodom (95)	Veld (92)	Leonard-Solt (90)
	Noreen-Wolson (81)	
	Leonard-Solt (90)	
	Lim-Phoon (91)	

Otra idea discutible con respecto a la dilución la aportan *Crouchy & Galai (91)*, quienes indican que en la práctica los precios de los warrants, cuando existe emisión real de acciones, se calculan como los de una opción, multiplicándolo por el factor dilución. Esto no quiere decir que lo consideren acertado, dado que genera valoraciones a la baja.

1.3. Mercado de warrants: Contratación y negociación

A continuación se pretende analizar la negociación de los warrants en el mercado español. Las peculiaridades de los warrants hacen necesario un mercado muy particular de cara al inversor, donde el intermediario tiene un papel fundamental, y donde el modelo de mercado y las normas de contratación son especiales.

El agente que desee operar en el mercado de warrants tendrá la restricción de no poder vender al descubierto como tal[3], por lo que para vender un warrant, previamente debe haberlo comprado. Al dar la orden de compra o venta del warrant, el banco o agencia de valores tiene dos opciones:

- Situarla en el mercado electrónico de bolsa de renta fija, que es donde se negocian los warrants y esperar a que alguna contrapartida se ejecute.
- Pedir al creador de mercado una contrapartida. Una vez realizada la operación, se registra en bolsa.

[3] Un agente podría hacer ventas al descubierto con su intermediario financiero, pero no directamente en el mercado.

En España, para cada tipo de producto existirá un *Mercado de Órdenes* al que se le aplican las normas de contratación general, un *Mercado de Bloques* para la comunicación de operaciones de gran volumen durante la sesión abierta del mercado de órdenes respectivo y un *Mercado de Operaciones Especiales* disponible después del cierre de mercado y destinado a la comunicación de operaciones.

En el mercado existen una gran variedad de subyacentes, incluso sobre índices extranjeros pero denominados en Euros y negociados en la Bolsa Española, con comisiones locales. Esto hace que se tenga una cierta ventaja competitiva al operar con warrants respecto al coste, seguimiento y control de la operación, en perjuicio de la operativa con opciones estándar, que es el producto financiero que más se le parece.

Con la finalidad de diferenciar los warrants un poco más de las opciones estándar, recordar que las opciones no tienen un compromiso de "*Market-Making*" fuerte: si se compra la opción y se quiere vender, se pone el precio de oferta en el mercado (MEFF) y se espera a ver donde se sitúa la demanda. Sin embargo, los emisores[4] de Warrants tienen la obligación de cotizar sus emisiones con una horquilla máxima de 5 % del valor de la prima y son fiscalizados en este aspecto por la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV) y la sociedad de Bolsas. Los Warrants son entonces más líquidos que las opciones.

Por otro lado, en cuanto a la negociación de opciones no hay una cantidad mínima, mientras que para los warrants sí que se puede exigir un mínimo negociable, que dependerá de las características de la emisión, aunque en la práctica no hay un mínimo por el deseo de difundir el mercado de warrants.

Algunas veces los warrants contienen **provisiones especiales**, esto es, la compañía emisora se guarda la posibilidad de:

- extender el vencimiento del warrant.
- reducir el precio de ejercicio.
- pagar el payoff con bonos privados.

[4]Las entidades emisoras de warrants en el mercado español son: *BBVA, Banesto Banco de Emisiones, Citibank, Commerzbank AG, SCH investment, Société Générale Acceptance* y *UBS AG -Sucursal Londres-*.

Cuadro 2: **Comparación entre un warrant y una opción**

	WARRANT	**OPCIÓN NEGOCIABLE**
Emisor	Una entidad financiera que se compromete a satisfacer el ejercicio al vencimiento.	MEFF renta variable.
Objetivo	Para un mismo subyacente pueden existir call warrant y put warrant.	En general, existen series de call y de put para cada subyacente.
subyacente	Existe una multitud de subyacentes, a excepción de oro (acciones, cestas de acciones, índices, obligaciones, divisas, materias primas, etc).	Una acción determinada o el índice "Ibex 35".
Precio de ejercicio	Se fija en el momento de la emisión. Puede ser ATM, ITM, OTM	Puede ser: a la par, por encima o por debajo.
Duración	Fijada por el emisor, varía de uno a cinco años.	Fijada cuando se crea una clase de opciones. Para las acciones es entre 3 y 12 meses y para los índices de 1 a 9 meses.
Negociación	Puede existir una cantidad mínima.	No existe una cantidad mínima.
Cotización	Numerosos warrants están listados en las bolsas de Madrid, Frankfort, etc.	Cotizadas por MEFF.
Operaciones posibles	Un warrant sólo puede ser comprado (venta al descubierto es imposible)	Se pueden comprar o vender. La venta conlleva un depósito de garantías.

En este trabajo se analizan warrants que no contienen este tipo de características por ser muy poco comunes en las emisiones de estos últimos años en el mercado español, además de por su poco peso en la literatura más relevante de la valoración de warrants. Se hace oportuno mencionar que las condiciones y características de los diferentes warrants son difundidos por las entidades emisoras por ley en los respectivos *folletos informativos*.

Otro de los elementos que se debe considerar en la valoración de warrants se denomina **ratio**. Este término hace referencia a la cantidad de warrants que se hacen necesarios para que llegados al vencimiento se tenga derecho a una acción del subyacente.

El plazo de **vencimiento** es otra de las características que diferencia los warrants y las opciones. Mientras para las opciones el vencimiento es inferior al año, oscilando entre los tres y nueve meses; para los warrants el vencimiento suele estar entre el año y los tres años.

Sabiendo que los warrants son un producto financiero a largo plazo, hemos de considerar la información extra que contienen con respecto a las opciones. Bakshi et al. [1] utilizan esta idea para ver que las opciones a largo plazo y las opciones a corto plazo ofrecen una información diferente que permite seleccionar entre diferentes modelos de valoración de opciones.

Por otro lado, Veld & Verboven [25] hacen una comparación de precios de warrants y precios de opciones con vencimiento a largo plazo en el mercado holandés. En su trabajo analizan la volatilidad implícita de los warrants y las opciones a largo plazo con mismo subyacente[5]. Encuentran que la volatilidad de los warrants es significativamente superior a la de las opciones, indicando que los warrants tienen un precio excesivo en relación a las opciones con vencimientos superiores a los cinco años.

[5]El razonamiento en el que se basan parte de que el precio de la opción es una función creciente de la volatilidad, por lo que una mayor volatilidad implícita de un warrant indicaría que están sobrevalorados y viceversa.

1.4. Motivación del trabajo

En el cuadro 3 se pueden observar los diferentes modelos de valoración de warrants que se han aplicado en los diferentes mercados, así como quienes han sido los autores que lo han llevado a cabo.

Cuadro 3: **Mercados donde se aplican los diferentes modelos de valoración.**

Mercado	**Estudio**	**Modelo**
Alemán	Schultz-Trautman (89)	Black-Scholes Modelo de elasticidad de la varianza constante (CEV)
Suizo	Stuki-Wasserfallen (91)	Modelo de Black Modelo Binomial Modelo Roll-Geske-Whaley
Holandés	Veld (92)	Modelo de Merton Modelo de la raíz cuadrada de elasticidad de la varianza constante (SRCEV)
U.S.A.	Noreen & Wolson (81) Ferri & Kremer Oberhelman (86) Kremer & Roenfeld (93)	Modelo de Merton SRCEV Black-Scholes CEV y variantes Modelo de Merton Black-Scholes y modelo de Merton Modelo de difusión con saltos
Japonés	Gemmil (89) Kuwahara & Marsh (92)	Modelo de Merton Black-Scholes con dilución
Inglés	Gemmil & Thomas (97)	Modelo de Merton

En un primer vistazo destaca el hecho de que no haya presencia de estudio alguno en el mercado español de warrants. Y al mismo tiempo se observa que ha sido un tema de actualidad en otros mercados, donde se han probado diferentes alternativas de valoración.

En los diferentes mercados de warrants se observa que la interrelación existente entre los modelos de valoración y los precios del mercado es heterogénea. En el cuadro

Cuadro 4: **Resultados de los estudios por mercados.**

	infravalorado	bien valorado	sobrevalorado	
Japonés	x			precio de mercado $<$ precio del modelo
U.S.		x		precio de mercado $\approx$ precio del modelo
Alemán		x		precio de mercado $\approx$ precio del modelo
Suizo			x	precio de mercado $>$ precio del modelo
Holandés			x	precio de mercado $>$ precio del modelo

4 se recoge lo que parece un consenso en la literatura de warrants, y tal consenso indica que hay mercados que valoran bien sus warrants, al contrario que otros.

En este trabajo se analiza la actuación de los modelos de valoración de los warrants en el mercado español. Por otro lado, se analiza si el mercado valora apropiadamente los warrants, o si, por el contrario, comete errores. En caso de que haya errores se analiza si las desviaciones son al alza o a la baja.

Tras haber contextualizado el mundo de los warrants en los mercados financieros de ayer y de hoy, en el punto 2 del trabajo se presentan los modelos de valoración de warrants más utilizados. En el tercer punto se pasa a describir los datos, para presentar los resultados en el siguiente punto. Finalmente, el punto 5 expone las conclusiones a las que se llega, así como las posibles líneas de investigación abiertas.

2. Diferentes modelos de valoración de warrants

A continuación se explican los modelos más relevantes en la valoración de los warrants.

2.1. Modelo de Black-Scholes-Merton

Un método de valoración de **opciones** comúnmente utilizado es el desarrollado por Black-Scholes, al que Merton añade el ajuste por dividendos. A continuación presentamos el caso particular **para valorar un warrant** de compra a partir de la fórmula de una opción de compra bajo el modelo de Black-Scholes para europeas[6]:

$$\mathcal{W} = \mathcal{R}\left\{S_d\,\mathcal{N}(d_1) - X\,e^{-rT}\,\mathcal{N}(d_2)\right\} \tag{2}$$

donde:

$\mathcal{W} =$	precio del warrant	$S =$	Precio del subyacente
$S_d =$	$S - \sum_i DIV_i\, e^{-rt_i}$	$X =$	Precio de ejercicio
$d_1 =$	$[\ln(S_d/X) + (r + \sigma^2/2)T]/\sigma\sqrt{T}$	$d_2 =$	$d_1 - \sigma\sqrt{T}$
$r =$	Tipo de interés libre de riesgo	$T =$	Vencimiento del warrant
$\mathcal{N}(d_i) =$	Distribución Normal Estandár evaluada en d_i	$\sigma =$	Volatilidad instantánea del rendimiento del subyacente
$DIV_i =$	Dividendo i-ésimo	$t_i =$	Tiempo hasta que el i-ésimo dividendo se paga
$\mathcal{R} =$	Ratio del warrant		

Este método de valoración de warrants no es más que una simple generalización de la valoración de opciones de Black-Scholes. Dado que este método de valoración no es del todo ajustado, a continuación vemos otros que aproximan mejor.

2.2. Modelo de Black

Black[7] sugiere una aproximación que tiene en cuenta el ejercicio temprano del derecho de compra o venta. La idea implica calcular el precio europeo de la opción cuyo

[6] Para opciones de venta

$$\mathcal{W} = \mathcal{R}\left\{X\,e^{-rT}\,\mathcal{N}(d_2) - S_d\,\mathcal{N}(d_1)\right\}$$

[7] **Black, F.**, (1.976) "*The pricing of commodity contracts*", the journal of financial economics, march '76, 167-79

vencimiento es T y t_n. Entonces se estima de nuevo el precio, quedándonos con el mayor de los dos precios. Con este mismo argumento Roll-Geske-Whaley han propuesto posteriormente una aproximación más depurada.

Partiendo del hecho de que la valoración de opciones y warrants en el mercado español no muestra diferencias relevantes, el procedimiento que derivan Roll-Geske-Whaley, aplicado para la valoración de warrants de acciones que dan dividendos, lleva a la siguiente fórmula de valoración, en la que mantenemos la notación de (2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} \;=\; & \mathcal{R}\Big\{(S - DIVe^{-rt_1})\mathcal{N}(b_1) + (S - DIVe^{-rt_1})\, M\left(a_1, -b_1; -\sqrt{\tfrac{t_1}{T}}\right) - \\ & - Ke^{-rT}M\left(a_2, -b_2; -\sqrt{\tfrac{t_1}{T}}\right) - (K - DIV)e^{-rt_1}\mathcal{N}(b_2)\Big\} \end{aligned} \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{\ln[(S_d - DIVe^{rt_1})/K] + (r+\sigma^2/2)\cdot T}{\sigma\sqrt{T}} \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T} \\ b_1 &= \tfrac{\ln[(S_d - DIVe^{rt_1})/S^*] + (r+\sigma^2/2)\cdot t_1}{\sigma\sqrt{t_1}} \\ b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{t_1} \end{aligned}$$

La variable σ es la volatilidad del activo subyacente menos el valor presente de los dividendos. La función $M(a, b; \rho)$ es la función de densidad de una distribución normal bivariante estandarizada, con primera variable menor que a y segunda variable menor que b, en caso de que el coeficiente de correlación entre ambas variables sea ρ. La variable S^* es la solución a

$$c(S^*) = S^* + DIV - K$$

donde $c(S^*)$ es el precio de la opción por Black-Scholes[8] cuando el precio de la acción es S^* y hasta vencimiento queda $T - t_1$. En caso de que nunca sea óptimo ejercer anticipadamente, entonces $S^* = \infty$, es decir, $b_1 = b_2 = -\infty$ y la ecuación (3) se reduce a (2). En el caso de $S^* < \infty$, entonces la opción debería ejercerse en t_1 cuando $S(t_1) > S^* + DIV$.

2.3. Simulación por MonteCarlo

Pasamos a discutir la valoración por MonteCarlo, donde se supone un mundo riesgo neutral. El payoff esperado se calcula con un procedimiento de muestreo y se descuenta

[8]Precio de una opción europea que no distribuye dividendos: $c = S_0\mathcal{N}(d_1) - K\,e^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$

a la tasa libre de riesgo.

Consideramos un derivado que depende únicamente del precio del subyacente, y suponemos un tipo de interés constante, entonces podemos calcular el valor de derivado como sigue:

- Generamos una muestra aleatoria para el subyacente.
- Calculamos el payoff del derivado.
- Repetimos ambos pasos sucesivamente para conseguir muchos valores muestrales del payoff en un mundo riesgo neutral.
- Calculamos la media de los payoff de la muestra para conseguir una estimación del payoff esperado en un mundo riesgo neutral.
- Descontamos el payoff esperado a la tasa libre de riesgo y obtenemos el valor del derivado.

Suponiendo que el proceso del subyacente es el siguiente:

$$dS = \hat{\mu} S\, dt + \sigma S\, dz \tag{4}$$

donde dz es un proceso de Wiener, $\hat{\mu} = r - \delta$ es el rendimiento esperado en bajo neutralidad al riesgo[9], y σ es la volatilidad. Para hacer la simulación del subyacente, se divide la vida del derivado en N intervalos de tiempo, y aproximamos (4) como:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \hat{\mu} S(t) \Delta t + \sigma S(t) \epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{5}$$

donde $S(t)$ representa el valor de S en t y $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Esto nos permite calcular el valor de $S(\Delta t)$ a partir del valor inicial de S y así sucesivamente.

En la práctica es más preciso simular $\ln S$ en lugar de S. A partir del lema de Itô, el proceso que sigue $\ln S$ es:

$$d \ln S = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dz \tag{6}$$

por lo que

$$\begin{gathered} \ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(\hat{\mu} - \tfrac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \\ \Downarrow \\ S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[\left(\hat{\mu} - \tfrac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}\right] \end{gathered} \tag{7}$$

[9] El rendimiento esperado es la tasa libre de riesgo r menos los dividendos δ.

A continuación vemos la alternativa que seguimos en el trabajo para valorar opciones americanas bajo simulación. Se utiliza el método de valoración por Monte Carlo con una aproximación por mínimos cuadrados tal y como sugieren Longstaff & Schwartz (ver [16]).

Para valorar opciones americanas es necesario decidir si ejercitar la opción o continuar hasta otro punto de ejercicio óptimo. La dinámica para dar precio a la opción americana puede ser descrita en términos de tiempo óptimo de parada, donde el mayor obstáculo radica en la estimación de la esperanza condicionada de los pagos del activo (en nuestro caso es el warrant).

La parada óptima que proponen Longstaff & Schwartz se determina en función de si la esperanza condicional del payoff futuro actualizado apropiadamente es mayor o menor que el ejercicio anticipado. El caso de una call:

$$\text{payoff}_t = E\left[e^{-r(T-t)}\,\text{máx}(S_T - X, 0)|\mathcal{F}_t\right] \approx \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 \tag{8}$$

El argumento para considerar esta aproximación como buena procede de la teoría de los espacios de Hilbert, que dice que cualquier función perteneciente a este espacio puede representarse como combinación lineal de los elementos de la base del espacio.

2.4. El modelo de la elasticidad de la varianza constante (CEV)

El modelo de la elasticidad de la varianza constante (CEV) asume que el proceso riesgo neutral que sigue el precio de un activo, S, es:

$$dS = (r - q)S\,dt + \sigma S^{\alpha}\,dz \tag{9}$$

donde r es el tipo de interés libre de riesgo, q es la tasa de dividendos, dz representa al movimiento browniano, σ es la volatilidad, y α es una contante positiva[10].

Cuando $\alpha = 1$, el modelo CEV se transforma en un movimiento geométrico browniano, lo que nos lleva al modelo de valoración anterior, el modelo de Black-Scholes. Cuando $\alpha < 1$, la volatilidad se incrementa cuando el precio del capital social (precio de la acción) disminuye. Esto crea una función de distribución similar a la que se observa

[10] Ver **Cox, J.C. & Ross, S.A.** (1.976), "*The valuation of options for alternative stochastic processes*", Journal of financial economics, 3, 145-66

para acciones normales con colas más pesadas por la izquierda[11]. Esto se corresponde con una sonrisa de volatilidad donde la volatilidad implícita es una función decreciente del precio de ejercicio. Por último, cuando $\alpha > 1$, la volatilidad incrementa con incrementos en el precio, dando una función de probabilidad con una cola derecha más pesada que por la izquierda. Esto se corresponde con una sonrisa de volatilidad donde la volatilidad implícita es una función creciente del precio de ejercicio.

Dentro de este modelo de valoración de warrants destaca el modelo de la raíz cuadrada de elasticidad de la varianza constante, que parte de suponer un proceso particular para el subyacente:

$$dS = \mu S\, dt + \sigma\sqrt{S}\, dz \tag{10}$$

Este puede ser un caso algo restrictivo, pero finalmente Beckers (80) llega a fórmulas cerradas de valoración para el modelo, que son:

$$c = S_0 e^{-qT}[1 - \mathcal{X}^2(a, b+2, c)] - Ke^{-rT}\mathcal{X}^2(c, b, a) \tag{11}$$

$$p = Ke^{-rT}\mathcal{X}^2(c, b, a) - S_0 e^{-qT}[1 - \mathcal{X}^2(a, b+2, c)] \tag{12}$$

cuando $0 < \alpha < 1$, y

$$c = S_0 e^{-qT}[1 - \mathcal{X}^2(c, -b, a)] - Ke^{-rT}\mathcal{X}^2(a, 2-b, c) \tag{13}$$

$$p = Ke^{-rT}\mathcal{X}^2(a, 2-b, c) - S_0 e^{-qT}[1 - \mathcal{X}^2(c, -b, a)] \tag{14}$$

cuando $\alpha > 1$, donde

$$a = \tfrac{K^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2\sigma^2 T} \quad b = \tfrac{1}{1-\alpha} \quad c = \tfrac{\left(Se^{(r-q)T}\right)^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2\sigma^2 T}$$

y donde $\mathcal{X}^2(z, v, \kappa)$ es la probabilidad acumulada de una variable con distribución $\mathcal{X}^2$ no centrada, con parámetro de no-centralidad v y con κ grados de libertad, siendo menos que z.

[11] La motivación es la siguiente: Al disminuir el precio del capital social, la volatilidad incrementa, haciendo que incluso sea más probable un menor precio para el precio de las acciones, y menos probable una recuperación del precio.

2.5. Modelos de volatilidad estocástica

Cuando la volatilidad instantánea es una función conocida del tiempo, el proceso riesgo neutral que sigue el precio de un activo es:

$$dS = (r - q)S\,dt + \sigma(t)S\,dz \tag{15}$$

La ecuación (15) asume que la volatilidad instantánea de un activo es perfectamente predecible. En la práctica la volatilidad es estocástica. Esto ha llevado a los investigadores a modelos bifactoriales donde las variables estocásticas son el precio del activo y su volatilidad.

Hull & White consideran el siguiente modelo de volatilidad estocástica en un contexto riesgo neutral:

$$\frac{dS}{S} = (r - q)\,dt + \sqrt{V}dz_s \tag{16}$$

$$dV = a(V_L - V)\,dt + \xi V^{\alpha} dz_v \tag{17}$$

donde a, V_L, ξ y α son constantes, y dz_s y dz_v son procesos de Wiener independientes. En este contexto V es la tasa de variación del activo ("volatilidad"), con reversión a la media V_L a la tasa a.

Hull & White comparan el precio dado por su modelo con el resultante del modelo de Black-Scholes, y llegan a una fórmula cerrada de valoración (Ver [10]). En el caso de una call europea es:

$$\int_0^{\infty} c(\bar{V})\,g(\bar{V})\,d\bar{V} \tag{18}$$

donde $\bar{V}$ es el valor medio de la volatilidad, c es el precio de Black-Scholes expresado como función de $\bar{V}$, y $g(\cdot)$ es la función de densidad en un mundo riesgo-neutral. Los precios de valoración para opciones pueden obtenerse mediante simulación Monte Carlo, o bien utilizando la familia de GARCH.

El caso en el que el precio del activo y la volatilidad están correlados es un poco más complicado, aunque Heston (1.993) desarrolla una fórmula cerrada para un proceso de raíz cuadrada para la varianza (ver [8]).

2.6. El modelo de difusión con saltos

Merton ha sugerido un modelo donde el precio de los activos tienen saltos. Definimos:

- μ: Rendimiento esperado de una acción que da una tasa de beneficio neto, q.
- λ: Número medio de saltos por año.
- k: Tamaño medio del salto, medido como un porcentaje del precio de la acción

El porcentaje del tamaño del salto en Δt es $\lambda\,\Delta t$. La tasa de crecimiento medio en el precio de la acción por el salto es por lo tanto λk. El proceso para el precio de la acción es:

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)\,dt + \sigma\,dz + dp \tag{19}$$

donde dp es un proceso de Poisson generador de saltos. Se asume que dz y dp son procesos independientes.

El supuesto clave que se hace en los modelos de difusión con saltos es que el componente de salto representa el riesgo no-sistemático[12]. Esto significa que una cartera como la que se supone en Black-Scholes, que elimina la incertidumbre con el movimiento browniano geométrico, se debe obtener el rendimiento libre de riesgo.

[12]Este supuesto es importante dado que no se puede aplicar una valoración riesgo neutral en situaciones bajos las que el tamaño del salto sea sistemático.

3. Los datos

En el trabajo se analizan los warrants negociados en el mercado español cuyo subyacente son las acciones del mercado continuo español. Los precios de warrants se recopilan de la página web de la bolsa de Madrid *(http://www.bolsamadrid.es)*. Se han recopilado todos los warrants emitidos y cotizados para el periodo correspondiente desde *mayo de 2.001 hasta el 14 de mayo de 2.003*. La elección del periodo tiene mucho que ver con el acceso a los datos. Pese a que la recogida de datos comienza en el año 2.001, no es hasta bien entrado el año 2.002 cuando la negociación de warrants incrementa significativamente, es decir, a partir de mayo de 2.002 se empieza a obtener una cantidad de datos que puedan derivar en un estudio con resultados interesantes.

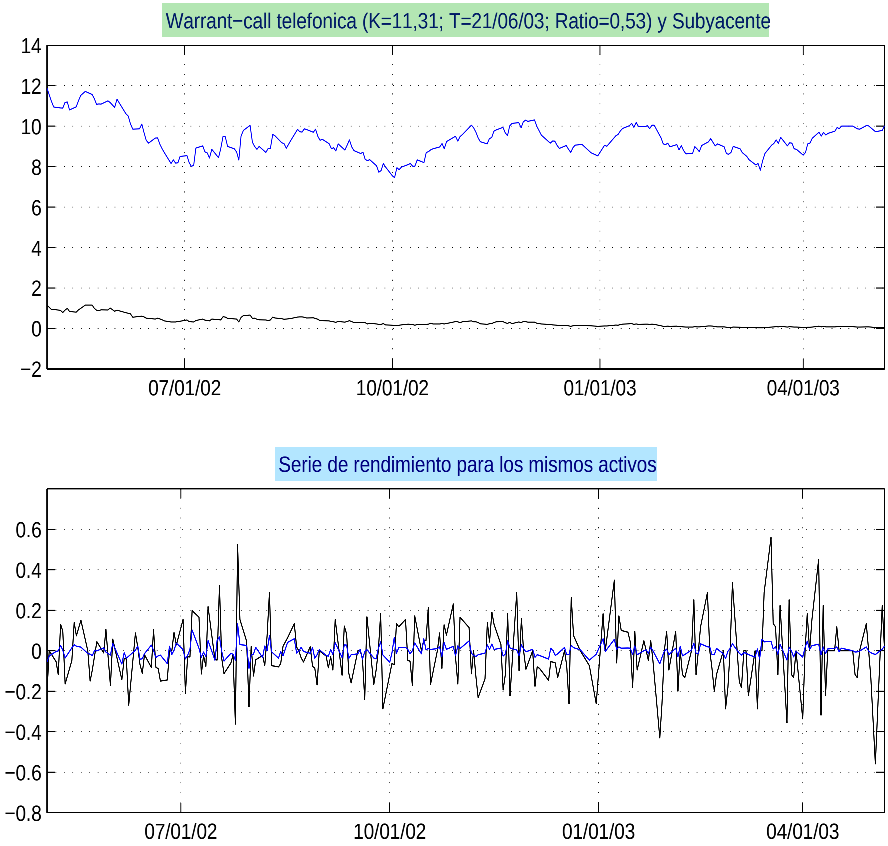
Finalmente se obtienen 38 warrants, que se reparten a partes iguales ser opciones de compra y opciones de venta, que por comodidad pasamos a denominar *warrants-call* y *warrants-put*. Los subyacentes de estos warrants coinciden con los activos más negociados del mercado español, disponiendo de los siguientes: Altadis, Amadeus-A, Bankinter, BBVA, Dragados, Endesa, Gas Natural, Iberdrola, Inditex, Indra-A, Repsol YPF, SCH, Sogecable, Telefónica, Telf.Móviles, Terra, TPI-Páginas Amarillas, Unión Fenosa y Zeltia.

En la figura 1 se representa un warrant-call de telefónica. Éste es uno de los warrants con mayor volumen de negociación disponible. Se escogen estos activos como ejemplo gráfico por ser bastante significativo de lo que sucede para otros warrants. Este warrant comienza a negociarse a primeros del 2.002 y deja de negociarse a primeros del presente año. El gráfico superior muestra en azul la evolución del subyacente en el mismo periodo en el que el warrant es negociado, y en negro aparece el precio de cierre del warrant en los días en los que fue negociado.

Como es esperado, el gráfico con las cotizaciones, junto con sus respectivas series de rendimientos[13] en la parte inferior, nos permite observar que el warrant es mucho más volátil que su subyacente, pese a que las sendas que describen los activos puedan llevar a pensar lo contrario. En conclusión, que pese a que las series de precios pueden llevar a pensar en una mayor volatilidad para las acciones de telefónica, lo cierto es que su warrant es mucho más volátil.

[13] Se estiman como el logaritmo del cociente de la cotización con respecto a la cotización del día anterior.

Figura 1: **Warrants en el mercado español: Warrant-call de Telefónica**

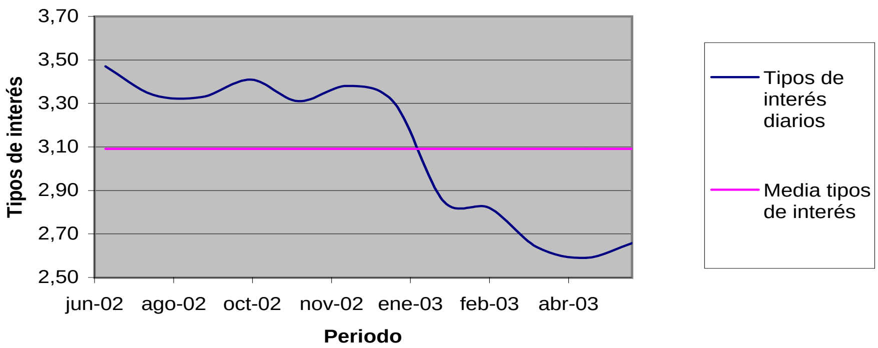


Además de los precios de cierre de cada **warrant**, se obtienen su vencimiento, precio de ejercicio y ratio asociados. Finalmente la cantidad de datos por warrant -incluyendo los diferentes vencimientos, precios de ejercicio y ratio- presentan una oscilación que va desde un mínimo de 30 datos para los diferentes warrants-put de Gas natural contra un máximo de 5.853 datos para los diferentes warrants-call de telefónica.

Por otro lado, los datos referentes al **subyacente**, que también los obtenemos de la web de Bolsa de Madrid, pertenecen a un periodo muestral algo superior al de los warrants. Se recogen los precios de cierre diarios correspondientes al periodo desde 2 de enero de 2.001 al 14 de mayo de 2.003, y posteriormente se utilizan los que son necesarios para la valoración de cada warrant. Se recoge un periodo algo mayor para poder estimar volatilidad a tres meses.

Finalmente, pasamos a comentar los datos sobre los **tipos de interés**. Dado que los warrants son activos que se pueden ejercer en cualquier momento, es decir, que en principio son opciones americanas, el tipo de interés que se considera libre de riesgo es el tipo de interés diario del mercado interbancario. Los datos sobre tipos de interés diarios se recogen de la página web del Banco de España, y se corresponden con el periodo de mayor negociación de warrants en el mercado español.

Figura 2: **Evolución de los tipos de interés diarios**



Al analizar los datos disponibles sobre los diferentes warrants se aprecia que no es hasta mediados del 2.002 cuando se negocian warrants con bastante frecuencia. Y dado que el modelo de Black-Scholes, que es el modelo analizado, supone un tipo de interés constante; el periodo de estimación asociado al tipo de interés debe corresponderse con el de la cotización de los diferentes warrants, y ello es lo que nos lleva a elegir el periodo de mayo 2.002 hasta el día de recogida de datos como el periodo de razonable para llevar a cabo tal estimación del tipo de interés.

Por lo tanto, se utiliza para el tipo de interés libre de riesgo, la estimación máximo verosímil de la media de los tipos de interés diarios del mercado interbancario, resultando de tal estimación que $r = 3,092$.

4. La valoración de los warrants

4.1. Introducción

A continuación se presentan los resultados obtenidos en la **valoración de los warrants para el mercado español**. Para realizar el trabajo se ha seguido la metodología que aplica Lauterbach en sus diferentes trabajos con Hauser y Schultz (ver [6], [7] y en menor medida [13]).

En este trabajo se sigue el modelo de valoración de **Black-Scholes** para opciones, pero aplicado a los warrants. Por lo tanto, tenemos que recordar que hay ciertas restricciones:

- El comportamiento del precio de las acciones es log-normal
- No hay costes de transacción o impuestos. Todos son activos financieros perfectamente divisibles.
- No hay dividendos sobre las acciones durante la vida del warrant
- No hay oportunidades de arbitraje libre de riesgo
- Los inversores pueden pedir prestado o prestar al mismo tiempo al tipo de interés libre de riesgo, que se devenga continuamente en el tiempo
- El tipo de interés libre de riesgo a corto plazo es constante

A pesar de tener estas restricciones vamos a poder diferenciar algunos casos en nuestro análisis. La primera diferencia que vamos a llevar a cabo en la valoración de los warrants es que las valoraremos como si fueran opciones **europeas**-no considera ejercicio anticipado-, y posteriormente como si fueran **americanas**-permite el ejercicio anticipado-, que *a priori* se acerca más a la realidad. La valoración que se lleva en un primer momento aplica la fórmula de valoración de Black-Scholes con los pertinentes cambios por ratio. La forma de valorar las opciones "americanas" será por *Mínimos Cuadrados de Monte Carlo*, tal y como nos proponen Longstaff & Schwartz (ver [16]). En dicho algoritmo creamos 1000 trayectorias para el subyacente y le damos la opción de ejercitar 50 veces a lo largo de la vida del warrant. La elección de estos números se basa en el tiempo de ejecución del algoritmo.

La segunda diferenciación en la valoración de los warrants se basa en el ajuste del ratio. La diferencia esencial en la valoración de los warrants en el mercado español con respecto a las opciones estándar, siendo el subyacente una acción nacional sin nueva emisión de acciones o ampliaciones de capital, es la forma de introducir **el ratio**.

Recordamos que en la literatura sobre warrants hay formas diferentes de aplicar la corrección por dilución[14], observándose que la forma más utilizada para aplicar tal efecto era multiplicar la valoración de una opción equivalente al warrant por el efecto dilución[15].

Siguiendo a la literatura sobre warrants en el estudio que se le ha dado a la dilución, en el trabajo se analiza si el efecto ratio se incluye apropiadamente en el mercado español de warrants. El seguimiento de esta línea de investigación se fundamenta en que la forma de incluir ambos elementos en la valoración de los warrants es semejante.

Se aplica la expresión (2), introduciendo el ratio de dos formas diferentes:

- La primera considera la volatilidad del subyacente sin ninguna corrección $\sigma = \sigma_{\text{acción}}$. Esta forma de estimar la volatilidad se corresponde con la estimación de la volatilidad cuando se valoran opciones estándar.
- La segunda aplica la corrección por ratio tal que: $\sigma = \text{ratio} \cdot \sigma_{\text{acción}}$, donde σ es la volatilidad del subyacente asociado al warrant. Esta es la forma apropiada de estimar la volatilidad cuando se valoran warrants porque el valor del warrant es una función que depende del subyacente, pero a su vez de la cantidad de subyacente a la que se tiene derecho, y eso nos lo indica el ratio.

Esto nos lleva a diferenciar dos modelos; un modelo que corrige apropiadamente el efecto ratio, y aquel que no lo hace por omitir parte de la corrección en la forma de estimar la volatilidad.

[14] Recordamos que para corregir de forma apropiada el efecto dilución implicaba tres cambios: cambiar el subyacente (en lugar de la acción, el valor de la compañía), multiplicar toda la fórmula de valoración por el efecto de incrementarse el número de acciones y cambiar la estimación de la volatilidad de forma apropiada.

[15] Para una explicación en detalle volver al apartado referente a dilución, y más concretamente donde se hace referencia a *Crouchy & Galai (91)*

Por lo tanto, se analizan diversos modelos para la estimación de los precios de los warrants, es decir, se estudian diferentes alternativas con objeto de alcanzar una aproximación más depurada del precio del derivado que se valora. Esta pluralidad de resultados nos permite comparar e indagar si el mercado está valorando de forma apropiada.

A la hora de aplicar los diferentes modelos de valoración se diferencian warrants según su grado de dinero. Para ello aplicamos el mismo criterio que siguen Hauser & Lauterbach en [6], [7], que se indica en el cuadro siguiente, donde S es el precio del subyacente y K es el precio de ejercicio:

Cuadro 5: Criterio para clasificar los warrants por grado de dinero o *moneyness*

	Warrant-call	Warrant-put
IN-THE-MONEY	$S/K > 1,1$	$K/S > 1,1$
AT-THE-MONEY	$0,8 < S/K < 1,1$	$0,8 < K/S < 1,1$
OUT-THE-MONEY	$S/K < 0,8$	$K/S < 0,8$

Finalmente cabe destacar que la medida que consideramos para ver la diferencia entre el precio del mercado y el precio del modelo, tal y como aplican Hauser & Lauterbach, se denomina *Error*, y se calcula:

$$\text{error} = \frac{\text{precio mercado} - \text{precio modelo}}{\text{precio mercado}} \tag{20}$$

4.2. La estimación de la volatilidad

La **volatilidad** es una variable crucial en los mercados de warrants. Se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Estadísticamente es la dispersión del rendimiento del activo subyacente, definiendo como rendimiento a las variaciones en el precio. Los incrementos de volatilidad producen aumentos en las primas de las warrants.

Cuanta mayor volatilidad tenga el subyacente, el rango de precios al vencimiento de la opción será mayor, lo que implica un riesgo superior para los vendedores de warrants y mayores probabilidades de beneficio para los compradores de warrants. El mercado de warrants traducirá los aumentos de volatilidad en aumentos de precios y viceversa.

En la literatura sobre warrants no se ha llegado a ningún consenso sobre la forma de estimar la volatilidad. Las alternativas más extendidas son la estimación de la volatilidad histórica, la volatilidad implícita y la volatilidad implícita sobre las opciones estándar que tengan el mismo subyacente.

En este trabajo optamos por hacer una estimación de la **volatilidad histórica** del subyacente asociado al warrant. La estimación de la volatilidad histórica es la desviación típica de la serie de rendimiento continuo del subyacente, multiplicado por raíz del número de días negociables al año, 252, para anualizar la volatilidad diaria que se estima; la estimación diaria procede de los datos de cierre diarios que se tienen para el subyacente. Además de esto se tiene en cuenta que no se utiliza el dato del subyacente referente al día que se negocia el warrant, por lo que la estimación de la volatilidad es la correspondiente a los 3 meses anteriores al día anterior al que se negocia el warrant[16]. Se eligen 3 meses para estimar la volatilidad por ser la metodología más común en MEFF para la estimación de dicho dato.

4.3. Diferencias en la valoración

Habiendo descrito los modelos que utilizamos en la valoración de los warrants, así como los elementos que le acompañan a su metodología de estimación asociada, nos disponemos a analizar los resultados.

En el cuadro 6 se presentan los errores medios de los diferentes warrants, estimados tal y como se indica en (20). Para el cálculo de esta tabla se calculan los precios de mercado aplicando la expresión de Black-Scholes, por lo que únicamente se permite el ejercicio del warrant en el vencimiento. Además, se presentan los diferentes resultados que se obtienen al estimar la volatilidad corrigiendo y sin corregir el ratio de forma apropiada. Al mismo tiempo se diferencian los activos en función de su *moneyness*, o grado de dinero.

Para cada vector de precios se realiza, además de la estimación mencionada del error medio, un **contraste de medias para datos emparejados**. Dicho contraste de medias es de tipo univariante y pretende contrastar si la media de los precios que se obtienen con el modelo coinciden con las que proporciona el cierre de mercado de los

[16]Esto significa que al programar se cogen los 60 datos referidos al intervalo de $(t-61)$ hasta $(t-1)$.

Cuadro 6: **Valoración de WARRANTS como europeas.**

	Volatilidad	Sin corregir			Corregida		
Warrants call	**Observaciones**	**IN**	**AT**	**OUT**	**IN**	**AT**	**OUT**
altadis	532	0,025	0,242	0,496	0,084	0,666	0,949
amadeus	876	-0,147	-0,231	-0,563	-0,147	0,041	-0,154
bankinter	36	NaN	-0,884	-1,069	NaN	0,984	0,950
bbva	2.352	-0,221	-0,782	-2,352	0,071	0,175	0,033
dragados	195	0,139	0,294	0,468	0,255	0,654	0,938
endesa	1.653	-0,262	-0,803	-2,476	-0,173	-0,200	-0,570
gas natural	146	NaN	-0,196	-0,237	NaN	0,498	0,492
iberdrola	690	-0,048	-0,111	-0,215	0,039	0,343	0,736
inditex	202	0,025	-0,214	-0,139	0,121	0,766	0,946
indra A	222	-0,021	0,008	-0,090	0,233	0,315	0,498
repsol ypf	1.810	-0,044	-0,219	-0,885	0,058	0,302	-0,183
sch	2.894	-0,258	-0,689	-2,444	-0,050	-0,141	-0,874
sogecable	645	-0,238	-0,582	-1,428	0,197	0,297	0,619
telefónica	5.853	-0,148	-0,468	-1,138	0,092	0,419	0,432
telf. Móviles	800	0,029	0,151	0,263	0,219	0,493	0,834
terra	1.443	0,037	0,046	-0,008	0,321	0,568	0,888
tpi	298	0,115	0,205	0,413	0,115	0,205	0,413
unión fenosa	468	-0,167	-0,361	-0,883	0,190	0,398	0,772
zeltia	632	0,194	0,284	0,463	0,405	0,692	0,950
Media	21.747	-0,058	-0,227	-0,622	0,119	0,393	0,456
Warrants put	**Observaciones**	**IN**	**AT**	**OUT**	**IN**	**AT**	**OUT**
altadis	484	NaN	0,655	0,803	NaN	0,951	0,996
amadeus	289	0,036	0,009	-0,158	0,148	0,304	0,515
bankinter	58	0,051	-0,054	NaN	0,295	0,757	NaN
bbva	1.240	-0,038	-0,196	-0,217	0,219	0,451	0,589
dragados	188	NaN	0,527	0,737	NaN	0,894	0,992
endesa	630	-0,016	-0,085	-0,048	0,132	0,256	0,293
gas natural	30	0,065	0,074	NaN	0,185	0,622	NaN
iberdrola	385	0,141	0,352	0,599	0,362	0,680	0,692
inditex	109	-0,020	-0,038	0,229	0,246	0,948	0,999
indra A	58	0,114	0,171	NaN	0,255	0,560	NaN
repsol ypf	710	0,030	0,089	0,371	0,213	0,478	0,448
sch	1.570	-0,031	-0,153	-0,199	0,194	0,297	0,509
sogecable	192	-0,073	-0,156	-0,360	0,283	0,457	0,602
telefónica	2.690	0,078	0,086	0,252	0,253	0,619	0,855
telf. Móviles	166	0,173	0,466	0,720	0,362	0,620	0,720
terra	502	0,070	0,123	0,310	0,264	0,545	0,567
tpi	84	0,283	0,393	0,508	0,283	0,393	0,508
unión fenosa	141	0,040	0,091	0,314	0,188	0,674	0,899
zeltia	257	0,206	0,355	NaN	0,387	0,735	NaN
Media	9.783	0,065	0,143	0,257	0,251	0,592	0,679

warrants. Este contraste pretende dar un enfoque estadístico a los resultados, siempre que sea posible.

El contraste es tan sencillo como el siguiente:

$$H_0: \quad \mu = 0$$
$$H_a: \quad \mu \neq 0$$

Para realizar dicho contraste se parte de la obtención de vectores de precios que tienen características comunes:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1(S_1, k_1, t_1, R_1, \ldots) \\ \vdots \\ x_n(S_n, k_n, t_n, R_n, \ldots) \end{pmatrix} \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1(S_1, k_1, t_1, R_1, \ldots) \\ \vdots \\ y_n(S_n, k_n, t_n, R_n, \ldots) \end{pmatrix}$$

donde uno de los vectores son los precios de cierre de los warrants y otro es el vector de precios que nos proporciona el modelo para un warrant con las mismas características del que se negocia en el mercado.

Como estimador de la media del contraste $\mu = \overline{\overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y}}$ se emplea $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$ donde n es el número de observaciones, que son las diferentes $(x_i - y_i)$; siendo la estimación máximo verosímil si la distribución es *normal*. Como estimador de la matriz de covarianzas puede emplearse $\hat{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((x_i - y_i) - \mu)((x_i - y_i) - \mu)'$ (máximo verosímil sesgado) o o $n(n-1)^{-1}S = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}((x_i - y_i) - \mu)((x_i - y_i) - \mu)'$ (insesgado). Es habitualmente irrelevante cual de ellos se emplee, en especial si n es moderadamente grande. En el trabajo emplearemos S y un nivel de significatividad del 5 %.

Este contraste nos proporciona ayuda siempre que exista normalidad en el nuevo vector $\overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y}$. A lo largo del trabajo se lleva el contraste de normalidad de Kolmogorov-Smirnov para el vector $\overrightarrow{X} - \overrightarrow{Y}$ y cada vez que la hipótesis nula se acepta se lleva a cabo el contraste de medias. En los cuadros 6 y 7 se muestran los casos en los que no se encuentra evidencia para rechazar los contrastes de normalidad e igualdad de medias, destacando el error medio asociado a estos casos con otro color.

Retomando el cuadro 6, se observa que el contraste de igualdad para datos emparejados sólo se acepta para warrants que no corrigen el ratio de la forma apropiada, es decir, que no lo incluyen de forma apropiada en la estimación de la volatilidad, aunque es en muy pocos casos[17]. Esto invita a pensar que el mercado no tiene en cuenta la corrección apropiada para el ratio.

Observando el error medio de valoración, para el que se utiliza el estimador máximo verosímil de la media de (20), se encuentra que sólo en los warrants-call que están fuera de dinero hay una reducción en términos absolutos del error al introducir el ratio adecuadamente. En el resto de los activos se observa que la introducción apropiada del ratio lleva a incrementos en el error medio, lo que nos lleva a mantener la opinión que se avanzaba con la aceptación del contraste de medias de datos emparejados.

Un elemento particular a destacar en la figura 3 vuelve a hacer referencia a los

[17] La mayoría de las veces no se ha podido hacer el contraste de igualdad para datos emparejados por falta de normalidad, es decir, no se encuentra evidencia para aceptar la hipótesis nula del contraste Kolmogorov-Smirnov.

warrants-call que no corrigen el ratio apropiadamente. Tales warrants son los únicos que en su mayoría tienden a estar valorados por debajo del precio que propone el modelo. De hecho, el 59 % de los warrants-call que están dentro de dinero están valorados por debajo del precio del modelo, incrementándose dichos porcentajes al 63 y 74 % respectivamente para los warrants en dinero y fuera de dinero. La conclusión es que parece que el mercado esté infravalorando únicamente los warrants-call de este modelo.

Habiendo entrado en la diferenciación de valoración según la clasificación de los warrants por grado de dinero, es reseñable que los warrants con un mayor error sean los que están fuera de dinero. Esta diferencia parece importante dado que se produce tanto para warrants-call como para warrants-put, y tengan o no una corrección apropiada en la volatilidad estimada. Analizando el signo del error se observa que los warrants que están fuera de dinero están sobrevalorados, excepto los warrants-call, que en general parecen estar infravalorados.

A continuación observamos el cuadro 7 en el que se lleva a cabo la misma valoración que en el cuadro 6, pero considerando la posibilidad de ejercer a lo largo de la vida del warrant siempre que sea oportuno. El ejercicio anticipado hace que se espere un precio del modelo superior al del modelo anterior. Los resultados de este cuadro proceden del algoritmo que se basa en el artículo de Longstaff & Schwartz para valoración de pociones americanas.

Al valorar los warrants incluyendo la posibilidad de ejercer anticipadamente se mantienen las pautas que se mostraban en la figura 3, destacando que los errores de valoración se reducen. Tal y como se esperaba, *los precios del modelo con posibilidad de ejercicio anticipado* -warrants americanos- son algo *superiores* a los que proporcionaba el modelo sin ejercicio anticipado -warrants europeos-, salvo para los warrants-call que no corrigen apropiadamente por ratio.

En la valoración del modelo con posibilidad de ejercicio anticipado se encuentra que el contraste de medias para datos emparejados se acepta un mayor número de veces, tanto para las dos formas de corregir por ratio, como por tipo de warrant -de compra y venta-. Al igual que en el modelo sin ejercicio anticipado el contraste de medias para datos emparejados se acepta más veces en la valoración que no incluye la corrección por ratio apropiada, por lo tanto, parece confirmarse que el mercado valore sin tener

Cuadro 7: **Valoración de WARRANTS como americanas.**

	sigma			sigma*R		
	IN	AT	OUT	IN	AT	OUT
altadis	**0,010**	0,230	**0,460**	0,080	0,660	0,940
amadeus	-0,160	-0,280	-0,680	-0,160	0,000	-0,230
bankinter	NaN	-0,950	-1,330	NaN	0,980	0,950
bbva	-0,240	-0,840	-2,590	0,060	0,150	-0,040
dragados	0,130	0,280	0,430	0,250	0,650	0,930
endesa	-0,300	-0,870	-2,690	-0,200	-0,240	-0,660
gas natural	NaN	-0,250	-0,260	NaN	0,480	0,500
iberdrola	-0,060	-0,140	-0,290	0,030	0,330	0,730
inditex	0,020	-0,240	-0,170	0,120	0,760	0,940
indra A	**-0,030**	-0,030	-0,210	**0,230**	0,290	0,440
repsol ypf	-0,070	-0,260	-1,020	**0,040**	0,280	-0,270
sch	-0,280	-0,750	-2,690	-0,060	-0,180	-1,010
sogecable	-0,170	-0,590	-1,580	0,190	0,270	0,590
telefónica	-0,170	-0,520	-1,300	0,080	0,410	0,380
telf, Móviles	**0,000**	0,120	0,200	0,210	0,480	0,820
terra	0,000	0,010	-0,100	0,310	0,560	0,880
tpi	0,090	0,180	0,370	0,100	0,180	0,370
unión fenosa	-0,160	-0,400	-0,990	0,200	0,390	0,750
zeltia	0,180	0,260	0,420	0,400	0,680	0,950
Media	-0,071	-0,265	-0,738	0,111	0,375	0,419
altadis	NaN	0.6298	0,783	NaN	0,9435	0,9943
amadeus	0.0075	**-0.0224**	**-0,225**	0,1121	0,2744	0,4674
bankinter	0.0138	-0.1087	NaN	0,1907	0,6635	NaN
bbva	-0.0691	-0.2340	-0,261	0,1733	0,4191	0,5616
dragados	NaN	0.5022	0,714	NaN	0,8831	0,9896
endesa	-0.0532	-0.1211	-0,098	0,0686	0,2228	0,2547
gas natural	**0.0435**	0.0217	NaN	0,1406	0,5837	NaN
iberdrola	0.0841	0.3098	0,569	0,2378	0,6497	0,6551
inditex	-0.0311	**-0.0795**	0,204	0,1926	0,9308	0,9988
indra A	0.0746	0.1386	NaN	0,2134	0,5374	NaN
repsol ypf	-0.0088	0.0536	0,333	0,1553	0,4472	0,4238
sch	-0.0585	-0.1870	-0,233	0,1535	0,2668	0,4836
sogecable	-0.1032	-0.1836	-0,385	0,2462	0,4352	0,5801
telefónica	0.0437	0.0511	0,215	0,1878	0,5917	0,8421
telf, Móviles	0.1299	0.4419	0,706	0,2783	0,5941	0,6944
terra	0.0402	0.0931	0,301	0,2153	0,5154	0,5416
tpi	0.2519	0.3724	0,481	0,253	0,3747	0,4859
unión fenosa	**0.0012**	0.0556	0,298	0,1232	0,6512	0,8868
zeltia	0.1801	0.3359	NaN	0,3466	0,7194	NaN
Media	0,000	0,000	0,200	0,193	0,630	0,580

en cuenta la corrección por ratio en la volatilidad.

El hecho de encontrar el *signo del error sin variaciones* del modelo que no permite ejercicio anticipado al que lo permite, nos confirma que el mercado español sobrevalora los warrants, dado que el único caso en el que hay muestras de infravaloración es para los warrants-call sin ajuste apropiado para el ratio.

La otra tendencia que repite de forma interesante sus resultados es la que dice que el mercado y el modelo producen un mayor error para warrants fuera de dinero que para los warrants en dinero, y éstos tienen a su vez un mayor error que los warrants dentro de dinero.

$$\text{Error}_{itm} < \text{Error}_{atm} < \text{Error}_{otm}$$

Cuadro 8: **Media del error en la valoración clasificado por *moneyness***

	Warrants	**Europeos**	Warrants	**Americanos**
Volatilidad	Corregida	Sin corregir	Corregida	Sin corregir
call ITM	0,119	-0,058	0,111	-0,071
call ATM	0,393	-0,227	0,375	-0,265
call OTM	0,456	-0,622	0,419	-0,738
put ITM	0,251	0,065	0,193	0
put ATM	0,592	0,143	0,630	0
put OTM	0,679	0,257	0,580	0,2

Finalmente se destaca que los warrants con menor error de valoración son los *warrants-put que no están fuera de dinero con posibilidad de ejercer anticipadamente*, y cuya estimación de la volatilidad *no incluye corrección por ratio*. Y por otro lado

4.4. Factores que afectan al restante error de valoración.

Los investigadores suelen examinar las deficiencias y desviaciones en la valoración de los modelos usando regresiones univariantes del error en la valoración sobre distintos parámetros, tales como el plazo hasta el vencimiento del warrant, el ratio y el grado de dinero -*moneyness*-.

$$\text{Error} = \alpha + \beta \cdot \text{Factor explicativo} + \varepsilon \tag{21}$$

Las siguientes tablas llevan a cabo tales estimaciones para los diferentes modelos que se analizan. La forma de estimar los parámetros aplica mínimos cuadrados ordinarios, y se proporciona el estadístico *t-student* que nos dice si los parámetros son o no significativos de forma individual.

En los cuadros 9 y 10 se analizan los diferentes factores en el modelo que no considera la posibilidad de ejercicios anticipados, pero que corrige apropiadamente el efecto producido por el ratio.

En el cuadro 10 se pueden observar los parámetros para los warrants-call. Se observa que el parámetro con mayor influencia en el error de valoración es el ratio, provocando una reducción en el mismo sentido. Por el contrario, el vencimiento es el factor que menos parece afectar, siendo no significativo para los warrants-call que están dentro de

Cuadro 9: **Regresión para resultados de WARRANTS-CALL europeos corrigiendo apropiadamente por ratio**

	Vencimiento		Ratio		Grado de	dinero
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
ITM	0,06	0,00	0,45	-0,65	0,32	-0,21
	(3,39)	(0,03)	(34,46)	(-63,43)	(17,17)	(-14,54)
ATM	0,63	-0,28	1,20	-1,56	0,92	-0,69
	(43,71)	(-25,22)	(123,70)	(-205,25)	(62,41)	(-59,93)
OTM	0,97	-0,65	3,04	-4,74	-0,50	1,00
	(19,12)	(-16,84)	(79,10)	(-162,89)	(-9,74)	(25,73)

dinero. Otra característica importante entre los warrants-call es que todos los parámetros tienen mayor influencia en el error en warrants que están fuera de dinero, que en los que están en dinero o dentro de dinero, respectivamente.

Cuadro 10: **Regresión para resultados de WARRANTS-PUT europeos corrigiendo apropiadamente por ratio**

	Vencimiento		Ratio		Grado de	dinero
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
ITM	0,085	0,14	0,4	-0,3	0,68	-0,34
	(15)	(28)	(69)	(-58)	(120)	(-68)
ATM	0,67	-0,11	1,2	-1,1	1,8	-1,3
	(49)	(-10)	(130)	(-140)	(140)	(-130)
OTM	0,9	-0,11	1,5	-1,3	1,2	-0,59
	(25)	(-3,8)	(73)	(-77)	(33)	(-21)

Por otro lado, en el cuadro 10 al contrario que para los warrants-call, se observa que no se reduce el error en la valoración por estar dentro o fuera de dinero, pero se mantiene el hecho de que el ratio sea el factor que más afecte al error, aunque también en menor medida que en el caso de los warrants-call. El vencimiento del warrant parece tener una influencia semejante para warrants-call y put, pasando desapercibido en la diferencia de precios.

A continuación se observa la influencia de los diferentes parámetros para el modelo

Cuadro 11: **Regresión para resultados de WARRANTS-CALL europeos sin corrección apropiada por ratio**

	Vencimiento		Ratio		Grado de dinero	
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
ITM	0,0094	-0,12	-0,052	-0,15	-0,41	0,23
	(0,6)	(-10)	(-3,3)	(-12)	(-26)	(18)
ATM	-0,31	-0,043	-0,4	0,059	-1,9	1,7
	(-19)	(-3,4)	(-25)	(4,7)	(-120)	(140)
OTM	-1,6	0,26	-0,54	-1,2	-2,7	2,3
	(-31)	(6,6)	(-11)	(-31)	(-54)	(59)

que no considera el ejercicio anticipado, ni corrige apropiadamente el ratio. Recordamos que el modelo que presentaba las mayores desviaciones en la valoración era aquel que no incluía ejercicio anticipado ni ajuste apropiado para el ratio; siendo un ajuste especialmente malo para los warrants-call, que en principio son los únicos infravalorados por el mercado.

En el cuadro 11 se observan los parámetros estimados cuando el error hace referencia a los warrants-call, mientras que en el cuadro 12 aparecen los warrants-put. El cociente entre el subyacente y el precio de ejercicio es quien soporta la mayor influencia en el error de valoración, y dicha influencia es mayor para los warrants-call que están fuera de dinero que para los que están en dinero; que a su vez es mayor que para los warrants que están dentro de dinero, respectivamente.

El grado de dinero del warrant actúa de forma semejante en ambos activos, aunque el signo para los warrants-call sea contrario que para los warrants-put. Como el signo de error era contrario, para que el grado de dinero tenga el mismo efecto tanto para los warrants-call como para los warrants-put, el signo resultante de la regresión se espera que sea contrario, y es lo que se observa.

Los cuadros que aparecen a continuación presentan el modelo que permite el **ejercicio anticipado**, con sus respectivas variaciones. Los cuadros 13 y 14 en particular presentan los warrants-call y put que no incluyen la corrección por ratio adecuada.

En general, se muestra la misma tendencia que se describe con el modelo anterior, es decir, el ratio y el vencimiento parecen tener un menor peso que el *grado de dinero*. Por otro lado, observando la clasificación de los warrants por grado de dinero, son los que están fuera de dinero los que ejercen una mayor influencia en el error de valoración.

Lo que también es persistente es que el grado de dinero influye de forma contraria en el error si observamos los warrants-call por un lado y los warrants-put por el otro. No es una característica que se dé sistemáticamente, pero sí parece generalizable. Y se hace notar que nuevamente el ratio, pese a ser estadísticamente significativo, no ejerce la misma influencia en el error como lo hacía en el primer modelo, donde se mostraba como el factor más influyente en la diferencia de valoración como consecuencia de su doble aparición en la valoración.

Finalmente llegamos al modelo que incluye los dos factores de forma apropiada, es decir, incluye la corrección por ratio de en la estimación de la volatilidad y permite el ejercicio anticipado de los warrants. Los cuadros 15 y 16 presentan los resultados de la estimación de los parámetros, así como el estadístico t-student para la significatividad de los mismos, para las regresiones de los warrants-call y put respectivamente.

La principal consecuencia de volver a un modelo que corrige el efecto ratio apropiadamente es que el peso de dicho factor en el error vuelve a incrementarse. Tal incremento hace que los efectos del grado de dinero y vencimiento reduzcan su importancia en el error, pese a que puedan ser más o menos significativos, que lo son.

En general, el factor que marca mayor contraste entre los modelos es **el ratio**, que adquiere un papel relevante en el error de valoración cuando los modelos lo incluyen de forma apropiada. Sin embargo, en los modelos que no incluyen el ratio de forma apropiada la influencia de este efecto se reduce sustancialmente. Esto nos invita a pensar que sea un factor determinante en la creación del precio del mercado, y que no se tiene en cuenta.

Por otro lado, los modelos y el mercado parecen discrepar en la valoración de los warrants que están **fuera de dinero**, pero quizás se llegue a un consenso si el modelo supusiese algún proceso para la volatilidad, y no fuese una simple estimación histórica.

Se hace curioso observar que **el vencimiento** pase desapercibido en la influencia que pueda tener en el error de valoración, pese a ser significativo en la mayoría de las regresiones; esto nos lleva a creer que no haya diferencia de información entre los warrants con vencimiento a muy largo plazo, y los que tengan un vencimiento más a corto plazo. Este resultado contrasta con el trabajo de Bakshi et al. [1] en el que su estudio parece concluir que las opciones a largo plazo y corto plazo proporcionan información diferente, por lo que los warrants no podrían ser utilizados para juzgar el mejor o peor ajuste de los diferentes modelos.

En lo que hace referencia al **grado de dinero** parece que hay nuevamente contradicciones entre el modelo y el mercado. Las contradicciones distinguen entre warrants-call y warrants-put. Por un lado, la influencia que tiene dicho cociente en el error de los warrants-call tiene signo contrario a la influencia que ejerce sobre los warrants-put.

A continuación, y tras haber comprobado que la mayoría de los parámetros que hemos estimado en las regresiones son significativos, realizamos una regresión conjunta. Se insiste con el método de ver cómo influyen los diferentes factores en la generación de diferencias en la valoración, pero en este caso la regresión que se realiza es la siguiente:

$$\text{Error}_t = \alpha + \beta_1(\text{vencimiento})_t + \beta_2(\text{ratio})_t + \beta_3(\text{grado dinero})_t + \varepsilon_t \tag{22}$$

Nuevamente estimamos los diferentes parámetros por mínimos cuadrados ordinarios, y presentamos el resultado de la estimación con su correspondiente estadístico *t-student* de significatividad individual de los parámetros en los cuadros 18 a 25. Dichos cuadros diferencian los distintos modelos de valoración, y en cada una de los cuadros hallamos una nueva sub-clasificación por grado de dinero, para poder comparar con los resultados de las regresiones anteriores.

Los resultados son coherentes con lo esperado, y consistentes con todo lo que hemos ido obteniendo. En general se obtienen parámetros mayores para warrants fuera de dinero, lo que es razonable por tener una mayor error de valoración.

Por otro lado, el **ratio** tiene una gran influencia en el error cuando se incluye en los modelos, mientras que se reduce a menos de la mitad cuando no se incluye apropiadamente en la estimación de la volatilidad. Esto nos dice que realmente es un factor que el mercado descuida a la hora de valorar. Por otro lado, el **grado de dinero** es el factor que releva al ratio cuando no participa como principal factor explicativo del error.

Por otro lado, el **vencimiento** pasa desapercibido como factor que pueda explicar las desviaciones de valoración entre el mercado y el modelo. Como consecuencia de esto se confirma que los warrants, en principio, no proporcionan información adicional a las opciones estándar por el simple hecho de tener un vencimiento superior.

4.5. Valoración de warrants en los diferentes mercados

En la literatura sobre warrants parece que hay un consenso a la hora de analizar si la valoración de los warrants en los distintos mercados es al alza, la baja o buena. Al mismo tiempo, uno de los objetivos del trabajo era poder ubicar el mercado de warrants español en esa clasificación, en la cual nos decantamos por la sobrevaloración en función de los resultados que se han obtenido. (Ver cuadro 17)

Destacamos que la base de esta sobrevaloración en el mercado español se justifica en el convencimiento de que la forma apropiada de valorar los warrants incluye el ratio en la estimación de la volatilidad, siendo el principal causante del descenso del precio del warrant para el modelo, tal y como nos hace ver en análisis de influencia de los factores.

Cuadro 12: **Regresión para resultados de WARRANTS-PUT europeos sin corrección apropiada por ratio**

	Vencimiento		Ratio		Grado de dinero	
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
ITM	0,02	0,012	0,011	0,039	-0,0089	0,031
	(4,6)	(3)	(2,5)	(9,9)	(-2,1)	(7,9)
ATM	0,19	-0,094	0,041	0,059	0,95	-0,92
	(14)	(-8,8)	(3)	(5,4)	(73)	(-89)
OTM	0,71	-0,33	0,39	-0,14	0,89	-0,79
	(16)	(-9,7)	(8,7)	(-3,9)	(20)	(-22)

Cuadro 13: **WARRANTS-CALL como americanas: Sin corrección por ratio**

	ITM	ITM	ATM	ATM	OTM	OTM
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
vencimiento	-0,0014	-0,1288	-0,3462	-0,0532	-1,7929	0,2914
t-stat	(-0,0809)	(-9,6119)	(-20,2456)	(-3,9701)	(-31,6208)	(6,7767)
ratio	-0,0653	-0,1596	-0,4407	0,0504	-0,6382	-1,2953
t-stat	(-3,7314)	(-11,7353)	(-25,7719)	(3,7612)	(-11,3964)	(-30,4776)
grado de	-0,4453	0,2349	-2,1043	1,8335	-3,3786	2,9903
dinero	(-25,1582)	(17,1460)	(0,0164)	(-128,31)	(-60,4401)	(70,2559)

Cuadro 14: **WARRANTS-PUT como americanas: Sin corrección por ratio**

	ITM	ITM	ATM	ATM	OTM	OTM
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
vencimiento	0,0047	-0,0045	0,1712	-0,1091	0,6934	-0,3419
t-stat	(1,045)	(-1,0976)	(12,4964)	(-9,9182)	(15,5820)	(-9,7957)
ratio	-0,0214	0,04	0,0074	0,0581	0,366	-0,1492
t-stat	(-4,7556)	(9,7561)	(0,5362)	(5,2342)	(7241,38)	(-4,0989)
grado de	-0,0326	0,025	0,9268	-0,93	0,8334	-0,7623
dinero	(-7,2444)	(6,0976)	(69,1641)	(-86,9159)	(18,0390)	(-21)

Cuadro 15: **Regresión para resultados de WARRANTS-CALL americanos corrigiendo apropiadamente por ratio**

	Vencimiento		Ratio		Grado de	dinero
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
ITM	0,06	0,12	0,31	-0,24	0,66	-0,36
	(10,02)	(22,93)	(52,75)	(-44,99)	(123,88)	(-75,68)
ATM	0,66	-0,12	1,14	-1,07	1,85	-1,41
	(47,40)	(-11,24)	(118,06)	(-138,84)	(141,78)	(-134,80)
OTM	0,90	-0,11	1,56	-1,33	1,21	-0,62
	(23,92)	(-3,90)	(70,99)	(-76,82)	(32,24)	(-21,08)

Cuadro 16: **Regresión para resultados de WARRANTS-PUT americanos corrigiendo apropiadamente por ratio**

	Vencimiento		Ratio		Grado de	dinero
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
ITM	0,06	-0,00	0,46	-0,68	0,31	-0,21
	(3,01)	(-0,29)	(33,33)	(-62,84)	(15,65)	(-13,74)
ATM	0,62	-0,29	1,22	-1,63	0,83	-0,62
	(41,24)	(-24,99)	(120,28)	(-205,52)	(53,84)	(-51,13)
OTM	0,96	-0,69	3,18	-5,07	-0,70	1,22
	(17,51)	(-16,56)	(76,92)	(-161,94)	(-12,75)	(29,19)

Cuadro 17: **Valoración en los mercados según estudios**

	Infravalora	Valora bien	Sobrevalora	
Japonés	x			precio de mercado $<$ precio del modelo
U.S.		x		precio de mercado $\approx$ precio del modelo
Alemán		x		precio de mercado $\approx$ precio del modelo
Suizo			x	precio de mercado $>$ precio del modelo
Holandés			x	precio de mercado $>$ precio del modelo
Español			**x**	precio de mercado $>$ precio del modelo

Cuadro 18: **Tablas de la regresión multivariante para modelos que permiten ejercicio anticipado.**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	0,87	0,02	-0,70	-0,35	0,54
	(20,17)	(2,33)	(-40,52)	(-10,83)	
ATM	2,09	-0,17	-1,59	-0,74	0,61
	(55,51)	(-21,77)	(-110,72)	(-19,35)	
OTM	2,54	-0,05	-5,04	1,05	0,45
	(27,37)	(-1,54)	(-91,71)	(9,08)	

Cuadro 19: **Warrants-call sin corrección por ratio, pero con posibilidad de ejercicio anticipado**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	-0,18	-0,12	-0,13	0,21	0,11
	(-3,39)	(-9,53)	(-6,15)	(5,26)	
ATM	-2,09	-0,07	0,09	1,85	0,08
	(-32,82)	(-5,06)	(3,74)	(28,35)	
OTM	-3,26	0,55	-1,47	3,13	0,07
	(-26,47)	(12,85)	(-20,11)	(20,31)	

Cuadro 20: **Warrants-put con corrección por ratio, pero con posibilidad de ejercicio anticipado**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	0,70	0,12	-0,31	-0,36	0,52
	(53,48)	(30,04)	(-34,96)	(-43,73)	
ATM	2,70	-0,05	-1,09	-1,56	0,70
	(90,83)	(-7,39)	(-95,05)	(-53,90)	
OTM	2,29	-0,07	-1,33	-0,88	0,69
	(27,49)	(-3,96)	(-46,95)	(-8,35)	

Cuadro 21: **Resultados para Warrants-put sin corrección por ratio, pero con posibilidad de ejercicio anticipado.**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	-0,05	-0,01	0,04	0,03	0,01
	(-3,97)	(-1,37)	(4,86)	(3,18)	
ATM	1,03	-0,12	0,07	-0,94	0,09
	(20,23)	(-11,27)	(3,62)	(-18,74)	
OTM	1,40	-0,34	-0,12	-0,87	0,10
	(8,08)	(-9,86)	(-2,04)	(-3,94)	

Cuadro 22: **Resultados para los warrants-call del modelo que NO permite ejercer anticipadamente y no incluye el ratio en la volatilidad.**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	-0,17	-0,12	-0,12	0,21	0,12
	(-3,51)	(-9,96)	(-6,26)	(5,65)	
ATM	-1,91	-0,05	0,09	1,68	0,08
	(-31,67)	(-4,49)	(4,13)	(27,30)	
OTM	-2,61	0,48	-1,34	2,39	0,06
	(-23,34)	(12,36)	(-20,23)	(17,10)	

Cuadro 23: **Resultados para los warrants-put del modelo que NO permite ejercer anticipadamente y no incluye el ratio en la volatilidad.**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	-0,05	0,01	0,04	0,04	0,01
	(-3,75)	(2,88)	(4,43)	(4,46)	
ATM	1,04	-0,11	0,07	-0,93	0,08
	(20,93)	(-10,07)	(3,54)	(-19,04)	
OTM	1,43	-0,33	-0,11	-0,89	0,10
	(8,46)	(-9,75)	(-1,95)	(-4,16)	

Cuadro 24: **Resultados para los warrants-call del modelo que NO permite ejercer anticipadamente e incluye el ratio en la volatilidad.**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	0,85	0,03	-0,67	-0,35	0,55
	(20,93)	(2,85)	(-41,05)	(-11,34)	
ATM	2,13	-0,16	-1,53	-0,81	0,62
	(59,64)	(-22,29)	(-112,10)	(-22,30)	
OTM	2,54	-0,06	-4,71	0,84	0,45
	(29,54)	(-1,96)	(-92,18)	(7,82)	

Cuadro 25: **Resultados para los warrants-put del modelo que NO permite ejercer anticipadamente e incluye el ratio en la volatilidad.**

	α	β_1	β_2	β_3	R^2
ITM	0,73	0,15	-0,38	-0,34	0,61
	61,21	41,26	-47,22	-44,93	
ATM	2,61	-0,03	-1,08	-1,48	0,71
	91,65	-4,97	-97,77	-53,00	
OTM	2,24	-0,06	-1,28	-0,85	0,68
	27,80	-3,74	-46,81	-8,25	

5. Conclusiones

A lo largo del trabajo se realizan varios análisis sobre la valoración de warrants, que son coherentes con la teoría de valoración, y que permanecen constantemente, permitiendo llegar a las siguientes conclusiones:

- El mercado no aplica el ajuste por **ratio** de forma apropiada. Tanto el modelo que permite ejercicio anticipado como el que lo permite únicamente en el vencimiento muestran que el error en la valoración es menor si no se incluye de forma apropiada el ratio.

- Los warrants **fuera de dinero** son los que tienen un mayor error absoluto en la valoración; por el contrario, los warrants que están dentro de dinero presentan un error de valoración menor.

- En general, los warrants en el mercado español tienden a sufrir un precio de mercado superior al que proponen los modelos que se han analizado. La única excepción al respecto son los warrants-call que no incluyen el efecto del ratio apropiadamente, ni permiten el ejercicio anticipado.

- El precio de mercado incluye el valor añadido de tener el derecho de ejercer anticipadamente. Incluyendo la posibilidad de ejercer anticipadamente los precios del modelo se incrementan, pero las pautas referentes a las diferencias de precios permanecen, es decir, el ratio sigue siendo un factor determinante en el precio, los warrants que están fuera de dinero evidencian el mayor error de valoración, etc.

- Tener el **vencimiento** como un elemento poco influyente en el error de valoración implica que tener un mayor o menor vencimiento no muestra diferente información, por lo que tomar los warrants con diversos vencimientos para juzgar si un modelo es mejor que otro no parece posible a priori, lo cual contradice el resultado esperado por Bakshi [1].

- Según los resultados donde se analiza la **influencia de los factores** en el error de valoración, el ratio es el factor que más determina dicho error, dado que provoca un descenso en los precios del modelo que el modelo no considera. En principio, un modelo correcto de valoración de warrants debiera incluir dicho efecto.

- Finalmente, enfatizar que el mercado español parece estar en linea con el mercado suizo y holandés, valorando sus warrants por encima del precio del modelo.

Por otro lado, el modelo de valoración de *opciones* de Black-Scholes no es del todo ajustado. A la hora de saltar a los modelos de valoración de *warrants* vemos que *no hay un paso equivalente* al que se ha dado para opciones, pese a la similitud en la valoración de ambos productos financieros. La investigación que se ha hecho para las opciones marcará la pauta a seguir en la valoración de warrants para el mercado español:

1. Permitiendo volatilidad estocástica.

2. Permitiendo tipos de interés estocásticos.

3. Permitiendo saltos aleatorios en el proceso del activo subyacente.

Se esperaría que un modelo de valoración que permite saltos y/o volatilidad estocástica mejore el ajuste de valoración. Incluso la literatura se inclina a que ajustaría mejor un modelo con tipos de interés estocásticos.

Referencias

[1] **Bakshi, G., Cao, C. & Chen, Z.** (2.000) "*Pricing and Hedging Long-Term Options*", Journal of Econometrics, 94, 277-318.

[2] **Beckers, S.** (1.980) "*The constant elasticity of variance model and its implications for option pricing*", The journal of finance, vol XXXV nº3, 661-73

[3] **Crouhy, M. & Galai, D.** (1.991) "*Common errors in the valuation of warrants and options on firms with warrants*", Financial analyst journal, september-october, 89-90

[4] **Ferri, M.G., Kremer, J.W. & Oberhelman, H.D.** (1.986) "*An analysis of the pricing of corporate warrants*", Advances in futures and options research, 201-26

[5] **Hanke, M. & Pötzelberger, K.** (2.002) "*Consistent pricing of warrants and traded options*", Review of Financial Economics

[6] **Hauser, S. & Lauterbach, B.** (1.997) "*The relative performance of fiva alternative warrant pricing models*", Financial analyst Journal, January/February, 55-61

[7] **Hauser, S. & Lauterbach, B.** (1.996) "*Test of warrant pricing models: the trading profits perspective*", The journal of derivatives, Winter, 71-9

[8] **Heston, S.** (1.993) "*A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*", Review of Financial Studies 6, 327-344.

[9] **Hull, J.C.** (2.003) "*Options, futures and other derivatives*", Prentice Hall International, fifth edition

[10] **Hull, J.C. & White, A.** (1.987) "*The pricing of options and on assets with stochastic volatilities*", Journal of finance, 42, 281-300

[11] **Kremer, J.W. & Roenfeldt, R.L.** (1.993) "*Warrant pricing: jump difussion vs. Black-Scholes*", Journal of financial and quantitative analysis, 155-72

[12] **Kuwahara, H. & Marsh, T.A.** (1.992) "*The pricing of japanesse equity warrants*", Management science, 1.610-41

[13] **Lauterbach, B. & Schultz, P.** (1.990) "*Pricing warrants: an empirical study of the Black-Scholes model and its alternatives*", The journal of finance, 1181-209

[14] **Leonard, D.C. & Solt, M.** (1.990) "*On using the Black-Scholes model to value warrants*", The journal of financial research, 81-92

[15] **Lim, K.G. & Phoon, K.F.** (1.991) "*Testing the warrant pricing model*", Economics letters, 451-55

[16] **Longstaff, F.A. & Schwarzt, E.S.** (2.001) "*Valuing American Options by Simulation: A simple Least Square approach*", The review of financial studies, vol 14, Nº 1, 113-47

[17] **Noreen, E. & Wolfson, M.** (1.981) "Equilibrium warrant pricing models and accounting for executive stock options", Journal of accounting research, 384-98

[18] **Schroder, M.** (1.989) "*Computing the constant Elasticity of Variance Option Pricing formula*", The journal of finance, 44, Nº 1, 211-18

[19] **Schulz, G.U. & Trautmann, S.** (1.989) "*Valuation of warrants -theory and empirical tests for warrants written on German stocks*", Working paper, University of Stuttgart (Germany), (October 1.989)

[20] **Schulz, G.U. & Trautmann, S.** (1.994) "*Robustness of option-like warrant valuation*", Journal of banking and finance, 841-59

[21] **Shastri, K & Sirodom, K.** (1.995) "*An empirical test of the BS and CSR valuation models for warrants listed in Thailand*', Pacific-basin finance journal, 465-83

[22] **Stucki, T. & Wasserfallen, W.** "*Pricing of warrants -an empirical evaluation*", Working paper, Study Center Gerzensee (Foundation of the Swiss National Bank), Gerzensee, Switzerland

[23] **Trautmann, S.** (1.996) "*Warrant pricing - some empirical findings for warrants written on German Stocks*", Methods on operations research, 293-306

[24] **Veld, C.** (2.003) "*Warrant pricing: a review of empirical research*", The european journal of finance, 9, 61-91

[25] **Veld, C. & Verboven, A.** (1.995) "*An empirical analysis of warrant prices versus long term options prices*", Journal of business finance and accounting, 1125-46